NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. HOSSARD

Note sur la méthode des moindres carrés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 456-460

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__456_1>

NOTE SUR LA METHODE DES MOINDRES CARRÉS;

PAR M. P. HOSSARD,
Chef d'escadron d'etat-major.

Afin de mieux fixer les idées, soit une fonction à deux variables considérée comme l'ordonnée verticale d'une surface. Supposons d'abord que les constantes à déterminer soient telles, que leur variation ne donne lieu qu'à un déplacement parallèle de la surface dans le sens des verticales, et que, par expérience, on ait déterminé un certain nombre de points devant lui appartenir. Si ces points ne s'accordent pas parfaitement entre eux, c'est-à-dire s'ils n'appartiennent pas exactement à une détermination unique de la surface, il est évident que la position à adopter serait celle qui établirait cette relation, savoir : que la somme des différences positives entre les verticales des points obtenus par expérience et les ordonnées correspondantes de la surface, fussent égales aux différences négatives ; c'est-à-dire que cette position serait donnée par une moyenne arithmétique, comme dans le cas de la détermination d'un point sur une verticale unique.

Généralement, la variation des constantes à déterminer donnera lieu à une déformation et à un déplacement non parallèle aux ordonnées ; il est clair alors que la surface à adopter ne correspondra plus à une égalité entre les erreurs positives et négatives des observations, car l'ordonnée de la surface, selon qu'elle correspondra à tel ou tel point observé, éprouvera des variations différentes pour une même variation des constantes ; mais il devient évident que le résultat de chaque observation devra avoir une influence d'autant plus grande dans la détermination de la surface à adopter, que cette observation correspondra à un point dont le déplacement sera plus considérable pour une même variation des constantes. Ainsi, une observation correspondante à un point invariable de la surface devrait rester sans influence, et être négligée, quelle que fût d'ailleurs la différence entre l'ordonnée donnée par l'observation et l'ordonnée du point fixe. Il est évident encore qu'un point obtenu par l'observation, là où la surface éprouve les déplacements les plus considérables pour une même variation des constantes, serait des plus propres à fixer la valeur de ces constantes ; enfin que si deux observations correspondent à deux points de la surface, dont l'un éprouve un déplacement double de l'autre pour une même variation des constantes à déterminer, le premier point sera deux fois plus convenable que le second pour fixer cette surface, et, par conséquent, devra entrer avec une influence double, relativement à celui-ci, dans le choix à faire.

Pour arriver à la détermination la plus avantageuse de la fonction cherchée, nous devrons donc prendre une moyenne arithmétique, comme dans le premier cas considéré, mais en faisant entrer chaque observation avec l'influence qui lui est propre.

Les idées de géométrie introduites ici ont eu pour but de rendre la démonstration plus tangible, pour ainsi dire, mais ne sont nullement nécessaires à son exactitude.

Il nous reste maintenant à montrer que ce procédé n'est autre que la méthode des moindres carrés donnée par Legendre, démontrée par Laplace et Poisson.

Soit une fonction de la forme

$$mf + n\varphi + \ldots,$$

f, φ, etc., étant des expressions sans coefficients indéterminés et dont les valeurs numériques sont des données de l'observation; m, n, etc., étant des constantes à déterminer, indépendantes, d'ailleurs, les unes des autres.

Par d'autres observations, on aurait

$$\begin{gathered} mf' + n\varphi' \ldots, \\ mf'' + n\varphi'' \ldots, \\ mf''' + n\varphi''' \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Soient v, v', v'',..., les valeurs respectives de ces fonctions, déduites de l'observation, et

$$e,\ e',\ e'',\ e''',\ldots,$$

les erreurs ou différences entre les résultats qui seraient donnés par la fonction adoptée comme la plus probable, et ceux donnés par l'observation. On aura

$$\begin{aligned} e &= mf + n\varphi \ldots - v, \\ e' &= mf' + n\varphi' \ldots - v', \\ e'' &= mf'' + n\varphi'' \ldots - v'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, si, dans la fonction, nous faisons varier successivement chacun des coefficients m, n, p, etc., en laissant les autres constants, nous remarquerons :

1°. Que lorsque m variera, la fonction éprouvera une variation proportionnelle à f pour l'erreur e, proportionnelle à f' pour l'erreur e', proportionnelle à f'' pour l'erreur e'', etc.; ces différentes erreurs devront donc entrer dans la formation de la moyenne avec des poids respectivement proportionnels à

$$f,\ f',\ f'',\ldots,$$

et l'on aura la relation

$$fe + f'e' + f''e'' \ldots = 0.$$

2°. Que, pour n variable, on aura

$$\varphi e + \varphi' e' + \varphi'' e'' \ldots = 0,$$

et ainsi de suite.

Ces équations, qui seront en nombre égal aux constantes, serviront à les déterminer; on sait d'ailleurs qu'elles reviennent à la condition du *minimum des carrés des erreurs*.

Soit, en effet,

$$e^2 + e'^2 + e''^2 + \ldots,$$

la somme des carrés des erreurs. Différentiant, en faisant varier successivement m, n, etc., les conditions du *minimum* seront :

$$e\frac{de}{dm} + e'\frac{de'}{dm} + e''\frac{de''}{dm} + \ldots = 0,$$

$$e\frac{de}{dn} + e'\frac{de'}{dn} + e''\frac{de''}{dn} + \ldots = 0,$$

. . . .

Or

$$\frac{de}{dm}=f, \quad \frac{de'}{dm}=f', \quad \frac{de''}{dm}=f'', \quad .$$
$$\frac{de}{dn}=\varphi, \quad \frac{de'}{dn}=\varphi', \quad \frac{de''}{dn}=\varphi'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut donc dire que la méthode des moindres carrés revient en réalité au calcul élémentaire des *moyennes arithmétiques*, en tenant compte, toutefois, du poids relatif de chacune des observations.