

TH. CLAUSEN

Intégration d'une équation différentielle

$$\int \frac{y dy}{(y^3+8)\sqrt{y^3-1}}$$

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 362-363

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__362_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\int \frac{y \, dy}{(y^3 + 8) \sqrt{y^3 - 1}} :$$

PAR M. TH. CLAUSEN.

(Nouvelles astronomiques de Schumacher, n° 442; t. XIX, p. 178; 1842.)

Posons

$$\begin{aligned} z &= \frac{y-1}{\sqrt{y^3-1}}, \quad z' = \sqrt{y^3-1}, \quad z'' = \frac{(y-1)^2}{\sqrt{y^3-1}}, \\ dz &= -\frac{y^3-3y^2+2}{2(y^3-1)^{\frac{3}{2}}} dy, \quad dz' = \frac{3}{2} \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^3-1}}, \\ dz'' &= \frac{1}{2} \frac{y^4+2y^3-3y^2-4y+4}{(y^3-1)^{\frac{3}{2}}} dy, \quad \bullet \\ \frac{dz}{1-3z^2} &= -\frac{1}{2} \frac{y^2-2y-2}{y^2-2y+4} \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}, \\ \frac{dz'}{z'^2+9} &= \frac{3}{2} \frac{y^2}{y^3+8} \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}, \\ \frac{dz''}{z''^2+9} &= \frac{1}{2} \frac{y-1}{y+2} \frac{dy}{\sqrt{y^3-1}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{dz}{1-3z^2} + \frac{dz'}{z'^2+9} + \frac{dz''}{z''^2+9} = \frac{6y \, dy}{(y^3+8) \sqrt{y^3-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{y \, dy}{(y^3+8) \sqrt{y^3-1}} &= \frac{1}{12\sqrt{3}} \log \left(\frac{1+z\sqrt{3}}{1-z\sqrt{3}} \right) \\ &+ \frac{1}{18} \operatorname{arc tang} \frac{1}{3} z' + \frac{1}{18} z' \operatorname{arc tang} \frac{1}{3} z'' \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{y^2+y+1} + \sqrt{y-1} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{y^2+y+1} - \sqrt{y-1} \cdot \sqrt{3}} \right) \\ &+ \frac{1}{18} \operatorname{arc tang} \left[\frac{3y(y-1)}{(4-y)\sqrt{y^3-1}} \right]. \end{aligned}$$

Observation. Legendre trouve cette intégrale par un moyen très-complicqué et la vérifie par une méthode plus courte. (*Traité des Fonctions elliptiques*, chapitre XXVI, n° 138.)