

E. PROUHET

Note sur la solution précédente

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 328-330

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__328_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA SOLUTION PRÉCÉDENTE;

PAR M. E. PROUHET.

Ainsi, en résumé, si l'on suppose $\varphi(m)$ développé suivant les puissances descendantes de m , il suffira, pour obtenir S_n , de multiplier respectivement tous les termes de $\varphi(m)$ par P_{-1} , P_0 , P_1 , P_2 , etc., en posant, pour abrégér,

$$P_i = (1 - a^i)(1 - b^i) \dots (1 - l^i);$$

mais on peut parvenir à ce résultat d'une autre manière, qui nous fera connaître en même temps une relation entre S_n et S_{n-1} .

Posons

$$\psi(p) = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + p^{n-1},$$

on aura

$$S_{n-1} = \psi(m) - \sum a^{n-1} \psi\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^{n-1} b^{n-1} \psi\left(\frac{m}{ab}\right) - \dots,$$

$$S_n = \varphi(m) - \sum a^n \varphi\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^n b^n \varphi\left(\frac{m}{ab}\right) - \dots,$$

où les signes sommatoires se rapportent aux nombres premiers qui entrent dans m .

Si l'on prend la dérivée de S_n par rapport à m , en traitant a , b , etc., comme des constantes; on aura

$$\frac{dS_n}{dm} = \varphi'(m) - \sum a^{n-1} \varphi'\left(\frac{m}{a}\right) + \sum a^{n-1} b^{n-1} \varphi'\left(\frac{m}{ab}\right) - \dots$$

Mais on a (page 188)

$$\varphi'(p) = n\psi(p) + B_{n-1};$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dS_n}{dm} = n \left[\psi(m) - \sum a^{n-1} \psi\left(\frac{m}{a}\right) + \dots \right] \\ + B_{n-1} \left(1 - \sum a^{n-1} + \sum a^{n-1} b^{n-1} - \dots \right), \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dS_n}{dm} = nS_{n-1} + B_{n-1} P_{n-1};$$

d'où

$$(2) \quad S_n = n \int_0^m S_{n-1} dm + B_{n-1} P_{n-1} m,$$

et il n'y a pas de constante à ajouter, puisque la formule (1) montre que S_n ne doit pas avoir de terme indépendant de m .

Mais, d'un autre côté, en posant $s_n = \varphi(m)$, on a

$$(3) \quad s_n = n \int_0^m s_{n-1} dm + B_{n-1} m;$$

par où l'on voit que si l'on se sert de l'équation (2) pour calculer S_0 , S_1 , S_2 , etc., ou de l'équation (3) pour calculer s_0 , s_1 , etc., le premier résultat ne différera du second que par le changement de B_0 en $B_0 P_0$, de B_1 en $B_1 P_1$, etc.; ce qui s'accorde avec la règle énoncée plus haut.

Nous avons donné, dans un autre article, les valeurs de s_0 , s_1 , ..., s_n (p. 189); on pourra donc en déduire, sans

(330)

nouveau calcul, les valeurs de $S_0, S_1, \dots, S_n$: on aura ainsi

$$S_4 = P_{-1} \frac{m^5}{5} + P_1 \frac{m^3}{3} - P_3 \frac{m}{30},$$

$$S_5 = P_{-1} \frac{m^6}{6} + 5P_1 \frac{m^4}{12} - P_3 \frac{m^2}{12},$$

$$S_6 = P_{-1} \frac{m^7}{7} + P_1 \frac{m^5}{2} - P_3 \frac{m^3}{6} + P_5 \frac{m}{42},$$

etc.