

DIEU

**Concours d'agrégation aux lycées,
année 1851**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 201-213

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__201_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851 ;

PAR M. DIEU,
Agrège, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Déterminer la courbe dont un arc de longueur l ayant ses extrémités sur deux droites données, parallèles à l'axe des x , soit tel, que le trapèze limité par cet arc, les ordonnées de ses extrémités et l'axe des x , engendre un volume maximum en tournant autour de cet axe.

Démontrer que cette courbe peut être décrite par le centre d'une hyperbole équilatère qui roulerait sans glisser sur l'axe des x .

Nous désignerons par M, M' les droites données, et par A, B les extrémités de l'arc cherché.

Soient, en outre,

x_1, x_2 les abscisses inconnues de A, B ;

y_1, y_2 les ordonnées connues de ces points ;

s la longueur de l'arc de la courbe pris à partir d'un point situé au delà de A par rapport à B , et s'étendant dans le sens de A vers B jusqu'au point (x, y) .

x_1 peut être prise arbitrairement, et nous supposons
 $x_2 > x_1, y_2 > y_1$.

Le volume dont il s'agit est représenté, d'après cela, par

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx,$$

et l'on doit avoir

$$(1) \quad \int_{x_1}^{x_2} ds = l;$$

ainsi (règle d'Euler) la question revient à la détermination de la courbe qui satisfait aux conditions relatives aux points A, B, et pour laquelle l'intégrale

$$(I) \quad \int_{x_1}^{x_2} (y^2 dx - \lambda ds)$$

est un maximum, λ étant une constante qui dépend de l'équation (1).

On a

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \cdot d\delta x + \frac{dy}{ds} \cdot d\delta y,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{ds} \cdot d\delta x = \left(\frac{dx}{ds} \cdot dx \right)_{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta x \cdot d_x \left(\frac{dx}{ds} \right),$$

et

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{ds} \cdot d\delta y = - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \cdot d_x \left(\frac{dy}{ds} \right),$$

car δx_1 , δy_1 et δy_2 sont nuls; donc la variation de l'intégrale (I) est représentée par

$$\begin{aligned} & \left[\left(y^2 - \lambda \frac{dx}{ds} \right) \delta x \right]_{x_2} \\ & + \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[\lambda \cdot D_x \left(\frac{dx}{ds} \right) - 2y \frac{dy}{dx} \right] \delta x + \left[\lambda \cdot D_x \left(\frac{dy}{ds} \right) + 2y \right] \delta y \right\} (*). \end{aligned}$$

Pour que cette variation soit nulle, ce qui est la condition commune aux maxima et minima de l'intégrale (I), il faut que

$$(2) \quad y^2 - \lambda \left(\frac{dx}{ds} \right)_{x_1} = 0,$$

$$(3) \quad 2y \frac{dy}{dx} - \lambda \cdot D_x \left(\frac{dx}{ds} \right) = 0;$$

(*) Le mode de calcul employé ici a l'avantage de laisser le choix entre deux équations, dont l'une est immédiatement intégrable.

et cela suffit, car l'équation (3), qui est immédiatement intégrable, ne diffère pas essentiellement de celle qu'on formerait en égalant aussi à zéro le coefficient de δy .

L'intégrale de l'équation (3) est

$$y^2 - \lambda \frac{dx}{ds} = C;$$

mais il faut faire $C = 0$, afin que cette intégrale soit, d'après l'équation (2), vérifiée par les valeurs de y et de $\frac{dx}{ds}$, relatives au point B; on a donc seulement

$$(4) \quad y^2 - \lambda \frac{dx}{ds} = 0.$$

En remplaçant dans cette équation $\frac{dx}{ds}$ par $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$,

puis résolvant par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on trouve

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - y^4}}{y^2}.$$

Les courbes qui satisfont à l'équation (5) sont de l'espèce de celles qu'on nomme *courbes élastiques* ou *linéaires* (*).

Il est facile d'en reconnaître la forme générale qui ne dépend pas de la valeur de λ , car on aurait évidemment des courbes semblables entre elles si l'on donnait différentes valeurs à cette constante, que l'on peut d'ailleurs regarder comme positive.

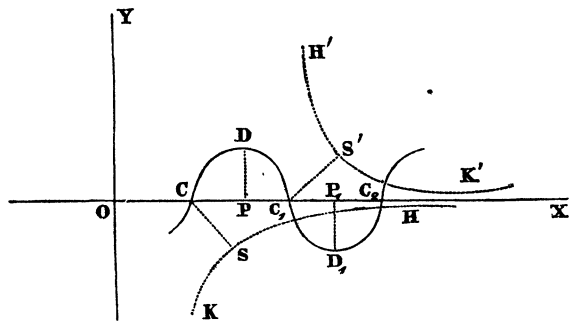
On voit d'abord que, pour ne pas créer de solution de continuité, on doit alternativement prendre $+$ et $-$ au second membre de l'équation (5), en changeant de signe lorsque y passe par une valeur qui rend $\frac{dy}{dx}$ nulle.

(*) *Théorie des fonctions*, etc., par M. Cournot, livre V, page 144; *Cours d'analyse*, par M. Duhamel, 2^e partie, page 258.

x allant en croissant, si l'on prend premièrement le signe $+$, y doit croître depuis zéro jusqu'à $\sqrt{\lambda}$, car $\frac{dy}{dx}$ est positive; la courbe a donc un arc tel que CD, touché en C par une perpendiculaire, en D par une parallèle à l'axe des x , et concave vers cet axe, car $\frac{dy}{dx}$ est ∞ pour $y = 0$, nulle pour $y = \sqrt{\lambda}$, et diminue constamment de l'un à l'autre. Le point D est un point maximum, car on doit prendre le signe $-$ au delà, et $\frac{dy}{dx}$ change ainsi de signe.

Avec le signe $-$, y doit décroître de $\sqrt{\lambda}$ à zéro, et l'on a l'arc DC_1 , qui est symétrique de DC par rapport à l'ordonnée DP, puisque $\frac{dy}{dx}$ a des valeurs égales et de signes contraires, sur ces deux arcs, pour la même valeur de y . En continuant de prendre $-$ jusqu'à ce que $y = -\sqrt{\lambda}$, puis en prenant $+$ jusqu'à $y = 0$, on a au-dessous de l'axe des x , l'arc $C_1 D_1 C_2 = CDC_1$.

Enfin, la courbe se compose d'une infinité de parties telles que $CDC_1 D_1 C_2$, se raccordant avec celle-là et entre elles, comme DC_1 se raccorde au point C_1 avec $C_1 D_1$.



Si l'on changeait de signe dans l'équation (5), non-

seulement quand y passe par une des valeurs $+\sqrt{\lambda}$ ou $-\sqrt{\lambda}$, mais encore quand y passe par zéro, la courbe qu'on aurait différerait de celle que nous venons de décrire, en ce que les parties placées comme $C_1 D_1 C_2$ se trouveraient du côté des y positives; elle présenterait donc des rebroussements, au lieu d'inflexions, en C, C_1 , etc., et offrirait de l'analogie avec la cycloïde au lieu d'en offrir avec la sinusoïde (*).

Les points d'inflexion C, C_1 , etc., de la courbe $CDC_1 D_1, \dots$ sont des centres de cette courbe.

On peut remarquer encore que le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'ordonnée. En effet, l'équation (5) donne

$$D_y \left(\frac{dy}{dx} \right) = \mp \frac{2\lambda^2}{y^3 \sqrt{\lambda^2 - y^4}};$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \cdot D_y \left(\frac{dy}{dx} \right) = - \frac{2\lambda^2}{y^5};$$

donc, comme $\frac{ds}{dx} = \frac{\lambda}{y^2}$, on a

$$- \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 : \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda}{2y} (**).$$

Il faut chercher maintenant à déterminer λ . Cette con-

(*) Toutes les fois que l'on connaît la tangente trigonométrique de l'angle que la tangente à une courbe fait avec un des axes, en fonction de la coordonnée qui se compte sur cet axe ou même d'une autre variable, la discussion de la courbe ne présente pas de difficulté réelle. La discussion des courbes du second degré suggère aux commençants l'idée qu'il faut avoir y en fonction de x pour pouvoir reconnaître la plupart des propriétés d'une courbe, et cette idée se maintient longtemps; si l'on disait, dans les cours, quelque chose des courbes du troisième degré, il n'en serait pas ainsi.

(**) Voir la Note I.

stante pouvant être regardée comme positive, nous ferons

$$\lambda = \alpha^2.$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (4), remplaçant λ par α^2 , $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$ par $1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$, et résolvant par rapport à ds , on obtient

$$ds = \pm \frac{\alpha^2 dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}},$$

que l'on ramène à

$$ds = \pm \alpha \cdot \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}},$$

en posant

$$y = \alpha u.$$

D'après cela, l'équation (1) devient

$$(6) \quad \alpha \left(\int_{\frac{y_1}{\alpha}}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} \pm \int_{\frac{y_2}{\alpha}}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} \right) = l,$$

le signe supérieur devant la seconde intégrale se rapportant aux cas dans lesquels l'arc AB coupe M' entre A et B, et le signe inférieur aux autres.

On voit immédiatement, quand on prend le signe + devant la seconde intégrale, que l'on ne peut avoir plus d'une valeur de α ; car les deux intégrales croissent avec α . Il n'est pas aussi facile de constater le même fait, quand on prend le signe —; cependant si l'équation fournissait, avec ce signe, plusieurs valeurs de α plus grandes que y_2 , on devrait avoir pour toutes ces valeurs

$$\begin{aligned} [l - (y_2 - y_1)] - \frac{1}{10} (y_2^5 - y_1^5) \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 \\ - \frac{1}{24} (y_2^9 - y_1^9) \left(\frac{1}{\alpha}\right)^8 - \dots = 0, \end{aligned}$$

par le développement des intégrales en séries convergentes. Or cela est impossible; car on tombe sur une équation algébrique en $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4$, à une seule racine positive, quel que soit le rang du terme auquel on s'arrête. Donc l'équation (6) ne donnera pas, en prenant — devant la seconde intégrale, plus d'une valeur de α supérieure à y_2 .

On peut supposer que le point B varie sur M' entre deux positions extrêmes, telles que, pour chaque position intermédiaire, il y ait une courbe de longueur l , dont l'équation se déduirait de l'équation (5) par le changement de y^2 en $y^2 - C$, et pour laquelle le volume engendré par le trapèze serait un maximum. Or, on demande la *maximum* de ces *maxima*, qu'il est permis de considérer comme les valeurs successives d'une fonction de x_2 .

Le calcul ne doit pas conduire plutôt à un maximum qu'à un minimum. Mais la fonction de x_2 dont il s'agit est évidemment très-petite lorsque x_2 diffère très-peu de x_1 , ce qui est possible; et, par conséquent, elle doit commencer par croître. Donc, si l'équation (6) ne fournit qu'une valeur de α plus grande que y_2 , celle du volume qui y répondra sera un maximum. Et si cette équation fournit deux valeurs de α qui satisfassent à la condition $\alpha > y_2$, l'une donnera un maximum, et l'autre un minimum.

Soit v le volume; on a, d'après l'équation (5),

$$v = \pi \left(\int_{y_1}^{\alpha} \frac{y^4 dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}} \pm \int_{y_1}^{\alpha} \frac{y^4 dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}} \right),$$

le même signe devant être pris devant la seconde intégrale que dans l'équation (6).

On trouve facilement que

$$\int \frac{y^4 dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}} = -\frac{y}{3} \sqrt{\alpha^4 - y^4} + \frac{\alpha^4}{3} \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}};$$

et en posant

$$y = \alpha \cos \varphi,$$

on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^4 - y^4}} = -\frac{1}{\alpha \sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}};$$

donc, il vient

$$\nu = \frac{\pi}{3} \left[\frac{y_1 \sqrt{\alpha^4 - y_1^4} \pm y_2 \sqrt{\alpha^4 - y_2^4}}{\alpha^3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{\varphi_1}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \pm \int_{\varphi_2}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \right) \right],$$

φ_1 et φ_2 désignant les plus petits arcs positifs qui aient $\frac{y_1}{\alpha}$

et $\frac{y_2}{\alpha}$ pour cosinus.

Enfin cette équation prend la forme

$$\nu = \frac{\pi}{3} \left\{ \frac{y_1 \sqrt{\alpha^4 - y_1^4} \pm y_2 \sqrt{\alpha^4 - y_2^4}}{\alpha^3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi_1\right) \pm F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi_2\right) \right] \right\}$$

par la notation des fonctions elliptiques (*).

Lorsque α aura deux valeurs, la plus grande valeur de ν sera le maximum, et l'autre sera le minimum (**).

Afin de démontrer le théorème qui forme la seconde partie de la question, nous chercherons l'équation de la

(*) On trouvera dans le Traité de M. Cournot, au chapitre déjà cité, les expressions de x et de s en fonction de φ .

(**) Un maximum d'une fonction peut être inférieur à un minimum; mais cela n'arrive que s'il y a entre eux un minimum et un maximum.

courbe décrite par le centre d'une hyperbole équilatère
roulant sur l'axe des x .

Soient :

2 a la longueur de ses axes ;

F, F' et U ses foyers et son centre, lorsqu'elle touche
Ox en M;

y, y', y_1 , les ordonnées de F, F', U; et

$$\mathbf{MF} = r \quad \text{et} \quad \mathbf{UMO} = \beta.$$

On a

$$(1) \quad y + y' = 2y_1,$$

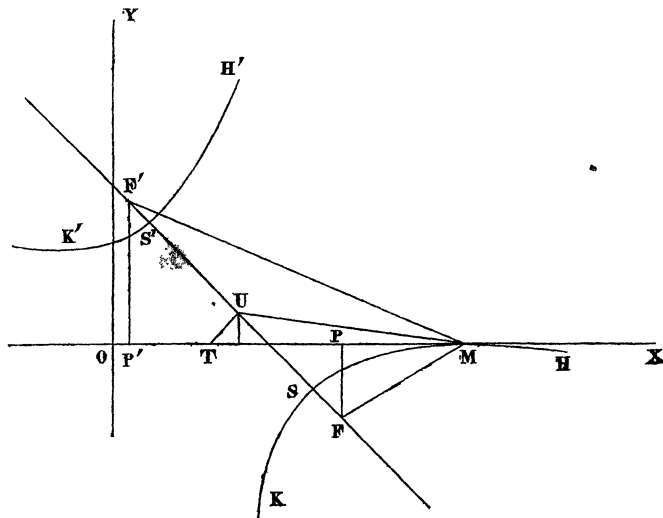
- puisque U est le milieu de FF' ;

$$(2) \quad yy' = -a^2,$$

par une propriété connue de l'hyperbole ;

$$(3) \quad \frac{y}{y'} = \frac{r}{2a - r},$$

par les triangles semblables PFM et $\text{P}'\text{F}'\text{M}$;



et le triangle FMF' fournit, d'après le théorème sur les médianes,

$$r^2 + (r - 2a)^2 = 2 \overline{MU}^2 + 2 \overline{UF}^2,$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad r(r - 2a) = \frac{y_1^2}{\sin^2 \beta},$$

en observant que $UF = a\sqrt{2}$, et que le triangle MUP donne

$$MU = \pm \frac{y_1}{\sin \beta}.$$

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), on obtient

$$y^2 = \frac{a^2 r}{r - 2a};$$

et l'élimination de y' entre les équations (1) et (3) conduit à

$$y = \frac{ry_1}{a}.$$

En remplaçant y par cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$(5) \quad r(r - 2a) = \frac{a^4}{y_1^2};$$

et les équations (4) et (5) donnent

$$\frac{y_1^2}{\sin^2 \beta} = \frac{a^4}{y_1^2},$$

de laquelle on tire

$$\sin \beta = \pm \left(\frac{y}{a} \right)^2,$$

suppression faite de l'indice de y .

Lorsqu'une courbe est décrite de la manière indiquée, la droite qui joint une position quelconque du point géné-

rateur à celui où la courbe roulante touche la ligne fixe est toujours normale à la première courbe (*); donc, si l'on représente par x l'abscisse du point U, dont l'ordonnée est maintenant désignée par y , et par s l'arc du lieu géométrique du centre de l'hyperbole compris entre un point quelconque de ce lieu géométrique et le point (x, y) , on a

$$\frac{dx}{ds} = \pm \sin \beta$$

Cette équation et la précédente donnent enfin pour la courbe décrite par le centre de l'hyperbole, l'équation

$$\frac{dx}{ds} = \pm \left(\frac{y}{a} \right),$$

qui ne diffère de l'équation (4) de la première partie que par le changement de λ en $\pm a^2$; et cela démontre suffisamment le théorème en question.

L'hyperbole équilatère pour laquelle $a = DP$ (fig. 1), ayant son centre en C sur Ox, et étant placée de manière que l'asymptote de la branche SH coïncide avec cet axe; à mesure que, par le mouvement de cette courbe, le point de contact se rapprochera de P, le centre U s'élèvera au-dessus de Ox, et il en sera à la distance maxima DP, lorsque l'hyperbole touchera Ox en P par son sommet S (ainsi CP est la différence entre l'asymptote CX et SH); le mouvement continuant dans le même sens, l'hyperbole touchera successivement Ox ou son prolongement par tous les points de la branche SK, et le centre U aura décrit l'arc DC, lorsque l'asymptote de SK sera venue se placer sur Ox. Le sens du mouvement changeant alors, la partie K'S'H' de l'hyperbole touchera successivement

(*) Voir la Note II.

Ox par tous ses points de K' vers H', et le centre U décrira au-dessous de l'axe des x l'arc $C_1 D_1 C_1$, etc., etc.

Note I. On trouve l'équation différentielle des courbes élastiques, en cherchant la courbe dont le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'ordonnée; ainsi, cette propriété est caractéristique.

En effet, on peut prendre

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}} = \pm \frac{\alpha^2}{2y}$$

pour l'équation de ce problème, $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ étant une ligne donnée au carré de laquelle le rectangle du rayon et de l'ordonnée doit être constamment équivalent.

Si l'on pose $\frac{dx}{dy} = x'$, cette équation devient

$$\frac{dx'}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{2y dy}{\alpha^2},$$

et l'on a, en intégrant de part et d'autre,

$$\frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \pm \frac{y^2 - \beta}{\alpha^2},$$

β étant une arbitraire.

Enfin, en résolvant cette dernière équation par rapport à $x' = \frac{dx}{dy}$, on a

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{y^2 - \beta}{\sqrt{\alpha^4 - (y^2 - \beta)^2}}.$$

Note II. Soient AA' une courbe tracée dans un plan, BB' une courbe donnée qui roule sans glisser dans ce plan

sur AA' , et M un point qui suive le mouvement de BB' de manière que ses distances à deux points déterminés de cette courbe ne varient pas.

Supposons qu'on ait marqué sur AA' des points $a_1, a_2, \dots, a_n$, et sur BB' les points $b_1, b_2, \dots, b_n$ qui viendront successivement coïncider avec ceux-là; puis, que des points (a) comme centres, avec des rayons égaux à $b_1M, b_2M, \dots, b_nM$, on ait décrit des circonférences. Ces circonférences formeront un polygone curviligne, dont le contour sera nécessairement coupé en des points $m_1, m_2, \dots, m_n$ par le lieu géométrique de M . Si l'on prend sur AA' de nouveaux points entre a_1 et a_2 , a_2 et a_3 , etc., en conservant ceux-ci, on aura de même un second polygone avec des points intermédiaires entre les points (m), et ainsi de suite.

Or la limite de ces polygones est évidemment un arc m_1m_n de la courbe décrite par le point M , et les lignes telles que a_1m_1, a_2m_2 , etc., sont toutes normales aux côtés correspondants de ces polygones; donc *ces lignes sont aussi normales à l'arc m_1m_n .*

QUESTION ANALOGUE A CELLE DU CONCOURS.

« Déterminer la courbe passant par deux points
 » donnés, dont l'arc compris entre ces points engendre
 » une surface minimum en tournant autour de l'axe
 » des x , tandis que le trapèze curviligne limité par cet
 » arc, les ordonnées de ses extrémités, et l'axe des x ,
 » engendre un volume donné.

» Démontrer que cette courbe peut être engendrée par
 » le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule
 » rait sans glisser sur l'axe des x . »
