NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DENIS

Solution de la question 87 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 147-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__147_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 87 (PROUHET)

(voir t. III, p. 376) ;

PAR M. J. DENIS,
Régent au collége de Cherbourg.

Soient p un nombre premier avec 10, k le nombre des entiers inférieurs et premiers à p; on sait que la division de 10^k par p ne peut jamais se faire exactement, et qu'elle donne pour reste l'unité. Cela posé :

THÉORÈME. *Soient* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k = 1$ *les valeurs absolues des restes obtenus en divisant par* p *les puissances successives de* 10, *depuis la première jusqu'à celle de l'ordre* k; *si l'on multiplie le quotient* $Q = \frac{10^k - 1}{p}$ *successivement par chacun des restes* $r_k, r_{k-1}, \ldots, r_1$, *en commençant par celui dont le rang est* k *et remontant jusqu'au premier, les produits obtenus seront tous composés des mêmes chiffres, et dans un ordre tel, que chaque produit pourra se déduire du précédent en transportant à sa gauche le premier chiffre qui est à sa droite.*

Démonstration. Je suppose pour plus de simplicité que les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$, qui sont nécessairement périodiques, ne forment qu'une période; s'il en était autrement, on se bornerait à considérer les restes contenus dans une seule période, et les quotients correspondants, comme on va le voir dans ce qui suit.

J'appelle $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ les chiffres obtenus au quotient, et correspondant respectivement aux restes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$; quelques-uns de ces chiffres peuvent être des zéros, même les premiers; mais les restes sont

des nombres d'un ou de plusieurs chiffres chacun, et ne sont jamais nuls.

D'après la définition de la division, on a en même temps les deux identités suivantes :

$$10^k = Qp + r_k,$$
$$10^k = (Q - q_k)p + r_{k-1} \times 10,$$

d'où l'on déduit

$$r_{k-1} \times 10 = r_k + q_k . p ;$$

ce qu'il est d'ailleurs facile de voir à priori. Mais, en vertu de la première identité,

$$p = \frac{10^k - r_k}{Q};$$

donc

$$Q r_{k-1} \times 10 = Q r_k + q_k (10^k - r_k),$$

ou bien

$$Q r_{k-1} \times 10 = Q + q_k (10^k - 1),$$

puisque

$$r_k = 1.$$

Or, on peut admettre que Q a toujours k chiffres, les premiers chiffres à gauche pouvant être des zéros ; alors le produit $Q r_{k-1} \times 10$ ou $Q - q_k + q_k . 10^k$ pourra s'obtenir en remplaçant par un zéro le chiffre q_k qui est à la droite du nombre Q, et écrivant k rangs plus loin le même chiffre q_k qui représentera alors $q \times 10^k$; puis, si l'on supprime le zéro mis à la place de q_k, on obtiendra le produit

$$Q r_{k-1} = \frac{Q - q_k}{10} + q_k . 10^{k-1},$$

lequel se déduit du premier produit $Q \times 1$, d'après la loi énoncée plus haut.

Généralement, soit le produit $Q r_n$ déduit des précé-

dents comme il vient d'être dit, et soit q_n son dernier chiffre à droite; je vais prouver que Qr_{n-1} pourra se déduire de Qr_n en transportant à la gauche de ce nombre le chiffre q_n qui est à sa droite.

D'après la définition de la division, on a en même temps

$$10^k = (Q - q_k - q_{k-1} \times 10 - q_{k-2} \times 10^2 \ldots - q_{n+1} \times 10^{k-n-1} - q_n \times 10^{k-n})\,p + r_{n-1} \times 10^{k-n+1},$$

$$10^k = (Q - q_k - q_{k-1} \times 10 - q_{k-2} \times 10^2 \ldots\ldots\ldots\ldots - q_{n+1} \times 10^{k-n-1})\,p + r_n \times 10^{k-n}.$$

De ces deux égalités résulte la suivante :

$$r_{n-1} \times 10^{k-n+1} = r_n \times 10^{k-n} + q_n \times 10^{k-n} \times p,$$

et comme $p = \dfrac{10^k - 1}{Q}$,

$$Qr_{n-1} \times 10^{k-n+1} = Qr_n \times 10^{k-n} + q_n \times 10^{k-n}.(10^k - 1),$$

$$Qr_{n-1} \times 10 = Qr_{n-1} + q_n\,(10^k - 1).$$

Or r_n est plus petit que p, puisque p est le diviseur, et r_n la valeur absolue de l'un des restes, et Qp est plus petit que 10^k, puisque $p = \dfrac{10^k - 1}{Q}$; donc, à plus forte raison, $Qr_n < 10^k$; Qr_n peut donc toujours être considéré comme composé de k chiffres, *significatifs ou non* : par conséquent, le produit $Qr_{n-1} \times 10$ ou $Qr_n - q_n + q_n \times 10^k$ pourra se déduire de Qr_n en transportant à la gauche de ce nombre le chiffre q_n qui est à sa droite, et remplaçant celui-ci par un zéro; puis, si l'on supprime

ce zéro, on obtiendra le produit

$$Qr_{n-1} = \frac{Qr_n - q_n}{10} + q_n \times 10^{k-1},$$

déduit du précédent, d'après la loi énoncée.

Si donc un des produits est ainsi formé avec celui qui le précède, il en sera de même de celui qui le suit ; mais nous avons prouvé cette loi de formation, pour le second : donc, etc.

Corollaires. 1°. Si le diviseur p est inférieur à 10, le quotient partiel q_1 sera au moins égal à 1, en sorte que Q contiendra k chiffres dont le premier ne sera pas zéro ; d'autre part, les restes r_1, r_2, r_3,..., r_k seront tous des nombres d'un chiffre chacun, et comme ils représentent respectivement des unités de l'ordre k, $k-1$, $k-2$,..., 1, il suffira de les écrire de gauche à droite, les uns à la suite des autres, dans l'ordre où ils ont été obtenus, pour former un nombre de k chiffres, tel que *si l'on multiplie le quotient total* Q *par ce nombre, tous les chiffres d'une même colonne verticale soient égaux,* suivant la remarque faite par M. Prouhet (*Nouvelles Annales,* tome III, page 376) sur les produits

$$142857 \times 326451.$$

Soit $p = 7$, on trouve pour quotients partiels

$$1, \quad 4, \quad 2, \quad 8, \quad 5, \quad 7,$$

et pour restes correspondants

$$3, \quad 2, \quad 6, \quad 4, \quad 5, \quad 1 ;$$

le multiplicande est 142857, le multiplicateur est 326451, et les produits partiels suivent la loi indiquée dans l'énoncé du théorème précédent.

2°. Si le diviseur p est supérieur à 10, le premier ou les premiers quotients partiels q_1, q_2,..., seront nuls, et les restes pourront être des nombres de plusieurs

chiffres chacun; mais la proposition démontrée n'en est pas moins vraie, puisqu'il n'a été fait aucune supposition sur la grandeur des restes, et que les quotients partiels q_1, q_2,..., q_k n'ont pas été supposés non plus avoir des valeurs particulières. Toutefois, pour que les produits Qr_k, Qr_{k-1},..., Qr_1 présentent la même régularité, il faudra remplacer par un zéro chacun des quotients q_1, q_2,..., qui sera nul, et effectuer les multiplications par les restes r_k, r_{k-1},..., r_1, comme si c'étaient des nombres d'un seul chiffre chacun.

Par exemple, soit $p = 21$: on trouve pour quotients partiels

$$0,\ 4,\ 7,\ 6,\ 1,\ 9,$$

qui forment une période complète, et pour restes correspondants les nombres

$$10,\ 16,\ 13,\ 4,\ 19,\ 1,$$

ce qui donne les produits rassemblés dans le petit tableau suivant :

$$\begin{aligned}
047619 \times\ 1 &= \quad 047619\\
047619 \times 19 &= \quad 904761\\
047619 \times\ 4 &= \quad 190476\\
047619 \times 13 &= \quad 619047\\
047619 \times 16 &= \quad 761904\\
047619 \times 10 &= 476190
\end{aligned}$$

Si deux ou plusieurs restes consécutifs sont des nombres d'un seul chiffre chacun, on peut former, comme nous l'avons fait plus haut, un multiplicateur de plusieurs chiffres jouissant de la propriété demandée (question 87). Il suffit de faire la somme des valeurs relatives de ces restes, mais en excluant ceux qui précèdent et ceux qui suivent.

Exemple. Soit $p = 13$; on trouve, pour quotients partiels,

$$0,\ 7,\ 6,\ 9,\ 2,\ 3,$$

qui forment une période complète, et pour restes correspondants

10, 9, 12, 3, 4, 1;

et en multipliant 076923 par le nombre 341 que forment les trois derniers restes, on trouve les trois produits partiels

076923
307692
2307690

qui jouissent de la propriété demandée.

3°. Il est évident que tout ce qui vient d'être exposé serait encore vrai, si au lieu de 10^k on prenait pour dividende la puissance a^k d'un nombre quelconque a, pourvu que le diviseur p fût premier avec a, que k fût le nombre des entiers inférieurs et premiers à p, et qu'on écrivît les nombres en prenant a pour base du système de numération.

Exemple. Soient $p = 5$, $a = 8$; si l'on effectue la division en écrivant les nombres avec les huit caractères 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, on trouve pour quotients partiels

1, 4, 6, 3,

qui forment une période complète, et pour restes correspondants

3, 4, 2, 1.

La multiplication du nombre 1463 par 3421, effectuée dans le système de numération dont la base est *huit*, donne les quatre produits partiels

1463
3146
6314
4631

où l'on retrouve la même régularité que dans les exemples précédents.