

GUSTAVE MARQFOY

Géométrie sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 10
(1851), p. 142-144

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__142_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1851, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ;
PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Élève de l'École Polytechnique.

Déduire des deux relations

$$(1) \quad \sin^3 \theta = \sin (\alpha - \theta) \sin (\beta - \theta) \sin (\gamma - \theta),$$
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

la suivante,

$$\cot \theta = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma \quad (\text{voir tome IX, page 363}).$$

Si l'on développe le produit indiqué dans le second membre de (1), on trouve, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de $\sin \theta$,

(*) Nous n'observons de mesure en rien ; passant immédiatement d'un extrême à l'extrême opposé. Autrefois, nous permettions une ignorance profonde en histoire et sur les langues ; aujourd'hui, nous sommes travaillés d'une fièvre historique et linguistique.

$$(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \begin{vmatrix} \sin^2 \theta - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ -\cos \beta \cos \gamma \sin \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta \sin^2 \theta + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ + \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \end{vmatrix} \cos^2 \theta \sin \theta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos^3 \theta = 0,$$

ou, en remplaçant $\sin^2 \theta$ par $1 - \cos^2 \theta$ et $\cos^2 \theta$ par $1 - \sin^2 \theta$,

$$\left. \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ -\cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ -\cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin^2 \theta + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ + \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \theta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ + \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ + \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos^2 \theta - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -\cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ -\cos \beta \cos \gamma \sin \alpha \end{vmatrix} \cos \theta \right\} = 0. \quad (143)$$

Mais

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi;$$

donc

(2)

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = -1,$$

(3)

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

En développant ces deux expressions, on reconnaît que les coefficients de $\sin^3\theta$ et $\cos^3\theta$ s'annulent. L'équation précédente devient, en remplaçant le coefficient de $\cos\theta$ par sa valeur $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ déduite de (3), et en supprimant les facteurs communs

$$\cot\theta = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma,$$

formule à laquelle on devait arriver.
