

TERQUEM

**Théorèmes sur l'équation aux carrés des
différences des racines, et application
géométrique aux faisceaux tangentiels.
D'après M. F. Joachimsthal**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 98-105

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__98_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES

Sur l'équation aux carrés des différences des racines, et application géométrique aux faisceaux tangentiels ;

D'APRÈS M. F. JOACHIMSTHAL.

(Journal de M. Crelle, t. XXXIII, p. 371, 1846; en français.)

1. *Lemme.* Soit

$$(1) \quad ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation générale du $n^{\text{ième}}$ degré ; représentons les racines par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Soient F une fonction symétrique entière des racines, et x_1^k la puissance la plus élevée de x_1 dans cette fonction ; $a^k F$ est une fonction entière des coefficients a, a_1, a_2, \dots , de l'équation (1).

Démonstration. On sait que F est une fonction entière des quotients $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \dots, \frac{a_n}{a}$: si l'on remplace ces quotients par les *combinaisons* de racines, on retrouve identiquement la fonction F. Dans ces combinaisons, chaque racine n'entre qu'au premier degré ; l'identité exige donc qu'il n'y ait pas un produit de plus de k de ces quotients : donc a^{-k} est la plus haute des puissances négatives de a ; donc, etc.

Observation. Dans les ouvrages élémentaires, et même dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, on suppose presque toujours $a = 1$; c'est une simplification à éviter : en particularisant, on ne raccourcit qu'en apparence.

2. THÉORÈME. *Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (1) étant mul-*

multiplié par $a^{2(n-1)}$, est une fonction entière des coefficients de cette équation.

Démonstration. Représentons ce dernier terme par Δ_n ; on a

$$\Delta_n = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \dots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2 (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dans cette fonction symétrique, la plus haute puissance de x_1 est $2(n-1)$; donc, d'après le lemme, etc.

3. Nous représentons par L la fonction entière $a^{2(n-1)}\Delta_n$, de sorte que $L = a^{2(n-1)}\Delta_n$. Soient B_n l'ensemble de tous les termes qui renferment a_n , et P les termes restants; on a donc $L = B_n + P$. Si, dans cette identité, on fait $a_n = 0$, B_n disparaît et P ne change pas; il est donc égal à ce que devient L , lorsqu'on y fait $a_n = 0$. Alors, une des racines de l'équation (1) devient nulle, et cette équation se réduit à celle-ci :

$$2) \quad ax^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_{n-1} = 0.$$

Supposons que ce soit la racine x_n qui ait disparu, et représentons par Δ_{n-1} le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (2). Soit Δ'_n et L' ce que deviennent Δ_n et L , en y faisant $x_n = 0$; or

$$\Delta'_n = (x_1 - x_2)^2 \dots (x_{n-1} - x_{n-2})^2 x_1^2 x_2^2 \dots x_{n-1}^2 = \Delta_{n-1} \left(\frac{a_{n-1}}{a} \right)^2,$$

et

$$L' = a^{2(n-2)} (a_{n-1})^2 \Delta_{n-1} = (a_{n-1})^2 L_1,$$

où

$$L_1 = a^{2(n-2)} \Delta_{n-1};$$

donc

$$L = B_n + (a_{n-1})^2 L_1.$$

Si dans L_1 nous représentons par B_{n-1} tous les termes

de L_1 qui renferment a_{n-1} , on trouvera de même

$$L_1 = B_{n-1} + (a_{n-2})^2 L_2 \quad \text{ou} \quad L_2 = a^{2(n-3)} \Delta_{n-2},$$

et ainsi de suite. En poursuivant, on parvient à

$$L_{n-2} = B_2 + a_1^2 L_{n-1};$$

L_{n-2} se rapporte à l'équation

$$ax^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

On a évidemment

$$L_{n-2} = a_1^2 - 4aa_2, \quad \text{ou} \quad B_2 = -4aa_2;$$

donc

$$L_{n-1} = 1;$$

et, en remontant, on trouve que L renferme le terme $(a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1)^2$, multiplié par l'unité positive.

4. L'expression L restant la même, en changeant dans les deux séries

$$a_n, a_{n-1}, a_{n-2} \dots a_1, a$$

en

$$a, a_1, a_2 \dots a_{n-1}, a_n,$$

on a donc aussi

$$L = A + a_1^2 L_1,$$

où A renferme tous les termes qui contiennent a ,

$$L_1 = A_1 + a_1^2 L_2,$$

où A_1 est l'ensemble des termes affectés de a_1 , et ainsi de suite.

4 bis. $L = 0$ est la condition pour que l'équation (1) ait au moins deux racines égales.

Applications géométriques.

5. A, B, C étant trois points en ligne droite, représentons leurs deux coordonnées respectives par $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$;

$\frac{x}{z}, \frac{y}{z}; \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$, où Z, z, c représentent l'unité, et qu'on adopte en vue de l'homogénéité (*voir* tome VII, page 5).

Posons $AB=r, AC=\rho$, nous supposons que le quotient $\frac{r}{\rho}$ est négatif, si A est entre B et C, et positif dans le cas contraire; on a

$$\frac{X-x}{X-a} = \frac{Y-y}{Y-b} = \frac{r}{\rho};$$

d'où l'on tire

$$X(\rho-r) = \rho x - ra, \quad Y(\rho-r) = \rho y - rb.$$

En joignant à ces équations l'identité $Z(\rho-r) = \rho z - rc$, l'équation de la droite passant par les points B et C est déterminée par ces trois équations : connaissant $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$, et le rapport $\frac{r}{\rho}$, on aura les coordonnées $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ du point quelconque A.

Soit

$$(3) \quad \varphi(X, Y, Z) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique de degré n , rendue homogène au moyen de l'introduction de Z .

Pour trouver l'intersection de cette courbe et de la droite indiquée ci-dessus, il faut remplacer X, Y, Z par leurs valeurs, et, après avoir multiplié par $(\rho-r)^n$, on obtient

$$(4) \quad \varphi[\rho x - ra, \quad \rho y - rb, \quad \rho z - rc] = 0.$$

Développant, par le théorème de Taylor, suivant les puissances de ρ et de r , on obtient

$$(5) \quad \rho^n p - \rho^{n-1} r \frac{P_1}{1} + \rho^{n-2} r^2 \frac{P_2}{1.2} - \dots + (-1)^n r^n \frac{P_n}{1.2\dots n} = 0.$$

Cette équation fournit les différentes valeurs de $\frac{r}{p}$ par lesquelles les n intersections de la droite et de la courbe sont déterminées. On a :

$$\begin{aligned} p &= \varphi(x, y, z), \\ p_1 &= a \frac{dp}{dx} + b \frac{dp}{dy} + c \frac{dp}{dz}, \\ p_2 &= a \frac{dp_1}{dx} + b \frac{dp_1}{dy} + c \frac{dp_1}{dz}, \\ &\dots\dots\dots \\ p_n &= a \frac{dp_{n-1}}{dx} + b \frac{dp_{n-1}}{dy} + c \frac{dp_{n-1}}{dz}. \end{aligned}$$

Les expressions p, p_1, p_2, \dots, p_n sont des degrés $n, n - 1, n - 2, \dots, 0$, par rapport aux quantités x, y, z , et des degrés $0, 1, 2, 3, \dots, n$, par rapport aux quantités a, b, c . L'équation $p = 0$ est la même que l'équation de la courbe. Si l'on tire du point $C(a, b, c)$ toutes les tangentes possibles dont le nombre est $n(n - 1)$, les points de contact sont sur la courbe du $n - 1^{\text{ième}}$ degré $p_1 = 0$. Si l'on tire du même point C des tangentes à celle-ci, les points de contact sont sur la courbe du $n - 2^{\text{ième}}$ degré $p_2 = 0$, et ainsi de suite. On a nommé ces différentes courbes *première, seconde, etc., polaire* de la courbe donnée, par rapport au point a, b, c .

Si l'on choisit les deux points B et C de manière que la droite BC devienne tangente, deux des racines de l'équation (5) seront égales. Désignons par $L = 0$, comme ci-dessus, la condition à laquelle doit satisfaire l'équation (5); il est clair qu'en posant constantes les coordonnées a, b, c , et variables les coordonnées x, y, z , la condition $L = 0$ donnera tous les points qui, avec le point a, b, c , déterminent les tangentes à la courbe, c'est-à-dire l'équation $L = 0$ représente l'ensemble des tangentes qui passent par le point (a, b, c) .

C'est le théorème de M. Cayley (*voir* tome VIII, page 117), et qu'on trouve dans le tome XXXIV du Journal de M. Crelle, imprimé avant le tome XXXIII.

6. Soit

$$(6) \quad p_i = 0$$

une courbe algébrique de degré i en x, y, z , et posons

$$\begin{aligned} a \frac{dp_i}{dx} + b \frac{dp_i}{dy} + c \frac{dp_i}{dz} &= p_{i+1}, \\ a \frac{dp_{i+1}}{dx} + b \frac{dp_{i+1}}{dy} + c \frac{dp_{i+1}}{dz} &= p_{i+2}; \end{aligned}$$

p_{i+1} et p_{i+2} sont de degré $i-1$ et $i-2$. Soit une autre courbe algébrique donnée par l'équation

$$(7) \quad R = U p_i + V (p_{i+1})^2 = 0,$$

U et V étant des fonctions quelconques de x, y, z : celle-ci et la courbe $p_i = 0$ auront $i(i-1)$ tangentes communes passant par (a, b, c) . En effet, pour qu'une tangente à la courbe (7) passe par a, b, c , les coordonnées du point de contact doivent satisfaire à la condition

$$a \frac{dR}{dx} + b \frac{dR}{dy} + c \frac{dR}{dz} = 0;$$

ou bien

$$\begin{aligned} U p_{i+1} + p_i \left(a \frac{dU}{dx} + b \frac{dU}{dy} + c \frac{dU}{dz} \right) \\ + 2 p_{i+1} p_{i+2} V + p_{i+1}^2 \left(a \frac{dV}{dx} + b \frac{dV}{dy} + c \frac{dV}{dz} \right) = 0. \end{aligned}$$

Mais les intersections de $p_i = 0$ et $p_{i+1} = 0$ satisfont à cette condition; ce sont donc $i(i-1)$ points de contact, tels, qu'en menant les tangentes à la courbe (7), les tangentes passent par (a, b, c) ; mais ces intersections sont sur la courbe même (7), et $p_{i+1} = 0$ indique que ces tangentes sont aussi tangentes à $p_i = 0$.

7. Soit $L = 0$ l'équation des tangentes issues du point (a, b, c) à la courbe du $n^{\text{ième}}$ degré, de sorte que L est de degré $n(n-1)$; on a vu plus haut (page 100) que L peut se mettre sous la forme $pU + p_1^2 L_1$, [voir l'équation (5)], et p_1 est de degré $n-1$: donc L_1 est de degré

$$n(n-1) - 2(n-1) = (n-1)(n-2);$$

de même, L_1 peut prendre la forme $p_1 U_1 + p_2^2 L_2$, où L_2 est de degré $(n-2)(n-3)$, et ainsi de suite. On a donc le théorème suivant :

Les $n(n-1)$ tangentes à une courbe $p = 0$ du $n^{\text{ième}}$ degré, qui passent par un point C , ont leurs points de contact dans une courbe $p_1 = 0$ de degré $n-1$; elles coupent la courbe en $n^2(n-1) - 2(n-1)n = n(n-1)(n-2)$ nouveaux points qui sont sur une courbe $L_1 = 0$ de degré $(n-1)(n-2)$; les courbes L_1 et $p_1 = 0$ ont $(n-1)(n-2)$ tangentes communes qui passent par le point C .

8. Exemple. $n = 3$.

$$\begin{aligned} p &= f(x, y, z) = a'x + b'y + c'z + 3dx^2y + 3d'x^2z \\ &\quad + 3ey^2x + 3e'y^2z + 3fz^2x + 3f'z^2y + 6gxyz, \\ p_1 &= 3f_1 = 3a(a'x^2 + ey^2 + fz^2 + 2gyz + 2d'zx + 2dxy) \\ &\quad + 3b(dx^2 + b'y + f'z^2 + 2e'y + 2gzx + 2exy) \\ &\quad + 3c(d'x + e'y + c'z^2 + 2f'yz + 2fzx + 2gxy), \\ p_2 &= 6f_2 = 6a^2(a'x + dy + d'z) + 6b^2(ex + b'y + e'z) \\ &\quad + 6c^2(fx + f'y + c'z) + 12bc(gx + e'y + f'z) \\ &\quad + 12ac(d'x + gy + fz) + 12ab(dx + ey + gx), \\ p_3 &= 6f_3 = 6a'a^3 + 6b'b^3 + 6c'c^3 + 18da^2b + 18d'a^2c \\ &\quad + 18eb^2c + 18e'b^2a + 18fc^2a + 18f'c^2b + 36gabc. \end{aligned}$$

Les expressions f, f_1 et f_2 se transforment les unes dans les autres par un changement des lettres x, y, z et a, b, c ; ce qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème général. Les équations $f = 0, f_1 = 0, f_2 = 0$ sont celles de la courbe

et de ses polaires. L'équation (5) devient

$$f - 3f_1 \frac{r}{\rho_1} + 3f_2 \frac{r^2}{\rho_2} - f_3 \frac{r^3}{\rho_3} = 0,$$

et $L = 0$ devient

$$(A) \quad (ff_3 - f_1 f_2)^2 - 4(f_1^2 - ff_2)(f_2^2 - f_1 f_3) = 0.$$

Telle est l'équation des tangentes qui passent par le point fixe (a, b, c) : pour trouver les intersections de ces tangentes avec la courbe, il faut combiner cette expression avec $f = 0$; alors cette équation se réduit à

$$f_1^2 (-3f_2^2 + 4f_1 f_3) = 0.$$

Le facteur $f_1^2 = 0$ indique que les lignes représentées par l'équation (A) sont tangentes à la courbe; les autres intersections sont situées sur la conique

$$(B) \quad -3f_2^2 + 4f_1 f_3 = 0.$$

On voit que la conique B et la polaire $f_1 = 0$ ont un double contact, et que la corde du contact est la polaire $f_2 = 0$; mais en tirant les deux tangentes de (a, b, c) à la courbe $f_1 = 0$, on sait que la corde de contact est aussi $f_2 = 0$; d'où le théorème suivant :

En tirant d'un point C six tangentes à une courbe du troisième degré, les points de contact sont situés sur une conique P; les tangentes coupent la courbe en six points situés sur une conique Q; les coniques P et Q ont un contact double, et les tangentes communes passent par le point C.

La première partie du théorème est connue; mais on n'avait pas encore l'équation B de la conique Q.