

ED. DEWULF

## Seconde solution du problème 35

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 9  
(1850), p. 60-62

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1850\\_1\\_9\\_\\_60\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__60_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SECONDE SOLUTION DU PROBLEME 53

(voir I, II, p. 36.)

PAR M. DEWULF (ED.),  
Élève au lycée de Saint-Omer.

---

1. *Lemme.* Lorsque deux tétraèdres ont un angle solide égal chacun à chacun, par superposition ou par symétrie, les volumes sont proportionnels aux produits des arêtes qui comprennent les angles égaux.

2. THÉORÈME. — Si l'on coupe un octaèdre régulier par un plan qui y produise la section  $abcd$ , on aura

$$\frac{1}{Sa} + \frac{1}{Sc} = \frac{1}{Sb} + \frac{1}{Sd}. \quad (\text{LEVY.})$$

*Démonstration.* Menons les diagonales  $ac$ ,  $bd$ . Les tétraèdres  $Sacd$ ,  $Sacb$  ont un angle solide égal en  $S$ ; de

même les tétraèdres  $Sbda$ ,  $Sbdc$  : donc, en vertu du lemme, on a

$$\begin{aligned} Sacd : Sacb &:: Sa.Sc.Sd : Sa.Sc.Sb :: Sd : Sb, \\ Sbda : Sbdc &:: Sb.Sd.Sa : Sb.Sd.Sc :: Sa : Sc. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Sabcd : Sacb &:: Sb + Sd : Sb, \\ Sabcd : Sbdc &:: Sa + Sc : Sc. \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{Sbra}{Sbcd} = \frac{Sa}{Sd} \text{ (lemme);}$$

donc

$$1 : \frac{Sa}{Sd} :: \frac{Sb + Sd}{Sa + Sc} : \frac{Sb}{Sc}.$$

Cette proportion donne

$$Sa.Sc(Sb + Sd) = Sb.Sd(Sa + Sc);$$

divisant chaque membre par  $Sa.Sb.Sc.Sd$ , on obtient

$$\frac{1}{Sa} + \frac{1}{Sc} = \frac{1}{Sb} + \frac{1}{Sd}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Note.* Ce moyen de démonstration s'applique à une pyramide quadrangulaire ayant pour base un rectangle dont le centre est le pied de la hauteur.

*Corollaire I.* Soit une pyramide ayant pour base un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, et dont le centre est le pied de la hauteur; si l'on coupe la pyramide par un plan rencontrant deux arêtes diamétralement opposées, en deux points A et A', S étant le sommet, la somme  $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'}$  est constante.

*Corollaire II.* Si l'on coupe un cône circulaire droit par un plan, A et A' étant les points d'intersection du plan avec deux arêtes diamétralement opposées, et S le sommet, la somme  $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'}$  est constante.

Soient B et B' les projections orthogonales de A et A' sur le plan passant par S perpendiculairement à l'axe; on aura évidemment  $\frac{1}{SB} + \frac{1}{SB'}$  constant : donc S est le foyer de la projection de la section faite dans le cône sur le plan passant par le sommet, et parallèle à la base (*voir* tome VIII, page 445).

---