MENTION

Théorèmes de M. Steiner sur les coniques inscrites à un triangle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 5-9

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

THÉORÈMES DE M. STEINER SUR LES CONIQUES INSCRITES A UN TRIANGLE (*);

PAR M. MENTION.

1. Nous nous servirons des notations employées dans les *relations d'identité*. Soit

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation d'une conique où γ est l'angle des axes:

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC),$$

$$\frac{dL}{dA} = l' = E^2 - 4CF, \quad \frac{dL}{dB} = -n = 2BF - DE,$$

$$\frac{dL}{dC} = l = D^2 - 4AF, \quad \frac{dL}{dD} = k' = 2CD - BE,$$

$$\frac{dL}{dE} = k = 2AE - BD, \quad \frac{dL}{dF} = m = B^2 - 4AC,$$

et

$$N = A + C - B\cos\gamma.$$

$\frac{4LN}{m^2}$ égale la somme algébrique des carrés des demi-axes. (*Voir* t. Ier, p. 493.)

(*) Cet article a précédé celui du tome VIII.

2. Soit ABC un triangle; fixons l'origine en A, et prenons AB pour axe des x et AC pour axe des y. Soit $y + ex + f = 0$ l'équation de la droite BC, α, β étant les coordonnées du point d'intersection des trois hauteurs; on a

$$\alpha = \frac{f\cos\gamma}{e}\left(\frac{\cos\gamma - e}{\sin^2\gamma}\right), \quad \beta = \frac{f\cos\gamma}{e}\left(\frac{e\cos\gamma - 1}{\sin^2\gamma}\right).$$

3. *Lemme*. Le lieu des centres d'une conique inscrite dans un triangle donné, et dont la somme algébrique des carrés des axes est constante, est une circonférence ayant pour centre le point de rencontre des trois hauteurs du triangle.

Démonstration. Soient ABC (n° 2) le triangle donné, et (1) l'équation de la conique inscrite; $4\psi^2$ la somme algébrique constante des demi-axes; la conique touchant les axes, on a

$$l = l' = 0$$

Touchant aussi le côté BC, on a

$$(2) \qquad -2en + mf^2 + 2fk' + 2fek = 0 \qquad \text{(t. II, p. 108)},$$

et

$$\frac{\text{LN}}{m^2} = \psi^2$$

Les relations d'identité donnent

$$k^2 = 4\text{AL}, \quad k'^2 = 4\text{CL}, \quad kk' + mn = -2\text{BL} \quad (\text{t. I}^{\text{er}}, \text{p. } 490).$$

Faisons

$$\frac{k}{m} = t, \quad \frac{k'}{m} = u;$$

t et u sont les coordonnées du centre de la conique. Ainsi

$$\frac{\text{L}}{m} = \frac{t^2}{4\text{A}}, \quad \frac{\text{C}}{\text{A}} = \frac{u^2}{t^2};$$

$$(3) \qquad -2e\frac{n}{m}+f^2+2fu+2fet=0\,;$$

$$ut+\frac{n}{m}=-2B\frac{L}{m^2}=-B\frac{t^2}{A}, \qquad -\frac{B}{A}=\frac{ut+\frac{n}{m}}{t^2}\,;$$

$$N=A\left[1+\frac{u^2}{t^2}+\frac{\cos\gamma}{t^2}\left(ut+\frac{n}{m}\right)\right];$$

$$\frac{LN}{m^2}=\frac{1}{4}\left[t^2+u^2+\cos\gamma\left(ut+\frac{n}{m}\right)\right]=\psi^2.$$

Éliminant $\frac{n}{m}$ entre cette dernière équation et l'équation (3), il vient

$$t^2+2ut\cos\gamma+u^2+\frac{2f}{e}u\cos\gamma+2ft\cos\gamma\frac{f^2}{e}\cos\gamma-4\psi^2=0,$$

équation d'un cercle; les coordonnées du centre sont α et β du § 2. C. Q. F. D.

Remarque I. Si la conique est un cercle inscrit au triangle, alors le rayon du lieu est égal à la distance du point de rencontre des hauteurs au centre du cercle inscrit, distance dont nous avons donné l'expression (tome V, page 403).

Remarque II. R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, le carré du rayon du *lieu*, dans le cas général, est $4(R^2\cos A\cos B\cos C+\psi^2)$.

Corollaire. Si $\psi=0$, les coniques deviennent des hyperboles équilatères, d'où :

Théorème. *Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrits à un triangle est une circonférence dont le centre est au point de rencontre des hauteurs.*

Le carré du rayon de cette circonférence est $\frac{dd'd''}{2R}$; les d sont les distances du point de rencontre des hauteurs aux trois sommets.

Remarque III. Le centre d'une conique tangente a quatre droites, et dont la somme algébrique des carrés des axes est donnée, sera donc fourni par l'intersection de quatre cercles; mais, les centres de ces cercles étant en ligne droite, ils ont une corde commune. D'ailleurs, d'après le théorème de Newton, le centre de la conique se trouve sur la ligne joignant les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet; donc :

THÉORÈME. *Dans tout quadrilatère, la droite des points de rencontre des hauteurs, dans les quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère, est perpendiculaire à la ligne qui passe par les milieux des diagonales.*

4. *Lemme.* Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle donné, le produit des axes étant constant, est une ligne du troisième degré.

Démonstration. (Voir tome IV, page 491.)

5. THÉORÈME. *Dans un triangle donné, on ne peut inscrire que six coniques* égales *à une conique donnée; les six centres sont à égale distance du point de rencontre des hauteurs du triangle.* STEINER.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux lemmes III et V. Un cercle ne peut rencontrer une ligne du troisième degré qu'en six points.

6. THÉORÈME. *A une conique donnée, on ne peut circonscrire que six triangles* égaux *à un triangle donné; les six points de rencontre des hauteurs sont à égale distance du centre de la conique.* STEINER.

Démonstration. Soit T_1 un triangle égal au triangle donné et circonscrit à la conique donnée C_1. Dans le même triangle T_1, on peut inscrire cinq autres coniques C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, égales chacune à la conique C_1 (n° 5). Considérons isolément le triangle T_1 avec chacune des cinq dernières coniques; nous pourrons placer ces cinq coniques sur la conique C_1, qui aura alors six triangles circonscrits égaux à T_1, et dont les points de rencontre des hauteurs sont à distances égales du centre de la conique. C. Q. F. D.

7. Lorsque $e = o$, le triangle se transforme en deux parallèles coupées par une sécante. Les lieux géométriques nos 3 et 4 se réduisent à une droite parallèle située à égale distance des deux parallèles, comme cela doit être. Le nombre des solutions du théorème no 5 se réduit à deux.

8. La ligne des points de rencontre des hauteurs (*Remarque* III) est la directrice de la parabole inscrite au quadrilatère (tome VII, page 253). La ligne des milieux est un diamètre de cette parabole; ce qui démontre le théorème de la *Remarque* III.