EDMOND PLOIX

Solution de la question 211

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 59-60

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__59_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 211
(voir t. VIII, p 392),

PAR M. PLOIX (EDMOND).

On prolonge le rayon de courbure d'une conique, à l'extérieur, d'une longueur égale à ce rayon; le cercle décrit sur le prolongement comme diamètre coupe orthogonalement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à la même conique. (STEINER.)

Prenons une ellipse dont le centre est en C; décrivons le cercle du rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à l'ellipse.

Soit une tangente quelconque AT; et AM le prolongement du rayon de courbure. Supposons décrit un cercle tangent en A à la droite AT, et coupant orthogonalement la seconde circonférence du rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. Soit G le point de rencontre des deux cercles; on sait que GC est tangent à la première circonférence, dont le centre est en O.

Il suffit de prouver que OA est égal au demi-rayon de courbure du point A, ou à

$$\frac{a'^2}{2\,b'\sin\theta}; \quad b' = \text{CA}; \quad \theta = \text{tang CAT}.$$

Or, soit prolongé CA jusqu'à ce qu'il rencontre de nouveau le cercle en B. On a

$$\text{CB}\,.\,\text{CA} = \overline{\text{CG}}^2 = a^2 + b^2;$$

donc

$$\text{CB} = \frac{a^2 + b^2}{b'}$$

D étant le milieu de AB, on a

$$\text{DA} = \frac{1}{2}\text{AB} = \frac{\text{BC} - b'}{2} = \frac{a^2 + b^2 - b'^2}{2b'} = \frac{a'^2}{2b'}.$$

Or

$$\text{OA} = \frac{\text{DA}}{\cos \text{OAD}} = \frac{\text{DA}}{\sin \theta};$$

on a donc

$$\text{OA} = \frac{a'^2}{2b' \sin \theta}.$$

Ce qu'il fallait trouver.

La même démonstration a lieu pour l'hyperbole. Le cas particulier pour la parabole est dû à M. Poncelet, et a précédé l'énoncé général de M. Steiner; il a été démontré par M. Gérono (tome II, page 185).