

V.-A. LEBESGUE

**Arithmologie. Note sur un système
d'équations indéterminées**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 46-51

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_46_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ARITHMOLOGIE. — NOTE SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS
INDÉTERMINÉES**

(voir t I, p 387),

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Le système en question est celui-ci :

$$\begin{aligned} (1) \quad & a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ (2) \quad & b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ (3) \quad & c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \\ (4) \quad & bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ (5) \quad & ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ (6) \quad & ab + a'b' + a''b'' = 0. \end{aligned}$$

Ces équations en donnent, comme l'on sait, beaucoup d'autres, dont nous allons rappeler brièvement la déduction, avant de faire connaître deux nouvelles équations dues à M. Jacobi. (*Journal* de M. Crelle, t. XX, p. 46.)

Les équations (5) et (6) donnent, par la résolution, relativement à $\frac{a}{a''}$, $\frac{a'}{a''}$,

$$\frac{b'c'' - b''c'}{a} = \frac{b''c - bc''}{a'} = \frac{bc' - b'c}{a''};$$

la valeur commune est ∓ 1 .

En effet, si l'on élève au carré, et que l'on ajoute terme à terme les fractions résultantes, en vertu de

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$

et de

$$\begin{aligned} (b'c'' - b''c')^2 + (b''c - bc'')^2 + (bc' - b'c)^2 + (bc + b'c' + b''c'')^2 \\ = (b^2 + b'^2 + b''^2)(c^2 + c'^2 + c''^2), \end{aligned}$$

on aura 1 pour la valeur du carré de la valeur commune.

On posera donc

$$(7) \quad \pm a = b'c'' - b''c',$$

$$(8) \quad \pm a' = b''c - bc'',$$

$$(9) \quad \pm a'' = bc' - b'c;$$

d'où, en multipliant par a, a', a'' les deux membres de ces équations, on aura, en sommant,

$$\pm 1 = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c).$$

Si dans ces quatre équations on permute circulairement $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$, la dernière équation ne changera pas; ainsi, les équations (7), (8) et (9) entraînent celles-ci :

$$(10) \quad \pm b = c'a'' - c''a',$$

$$(11) \quad \pm b' = c''a - ca'',$$

$$(12) \quad \pm b'' = ca' - c'a;$$

$$(13) \quad \pm c = a'b'' - a''b',$$

$$(14) \quad \pm c' = a''b - ab'',$$

$$(15) \quad \pm c'' = ab' - a'b;$$

$$(16) \quad \pm 1 = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c).$$

Au moyen de ces équations (7) à (15), on vérifie tout de suite ces trois autres :

$$(17) \quad aa' + bb' + cc' = 0,$$

$$(18) \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

$$(19) \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

enfin, les équations

$$(20) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$(21) \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

$$(22) \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

s'établissent ainsi :

$$\begin{aligned} (a'^2 + a''^2)(b'^2 + b''^2) &= (1 - a^2)(1 - b^2) = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2 \\ &= 1 - a^2 - b^2 + (a'b' + a''b'')^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$(a' b'' - a'' b')^2 = 1 - a^2 + b^2,$$

ou bien

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

A ces équations (7) à (22), M. Jacobi a joint deux équations très-remarquables,

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ}. a^2 a'^2 a''^2 + b^2 b'^2 b''^2 + c^2 c'^2 c''^2 \\ = a^2 b^2 c^2 + a'^2 b'^2 c'^2 + a''^2 b''^2 c''^2. \end{array} \right.$$

On a

$$a^2 a'^2 a''^2 = a' a (b b'' + c c'') (b b' + c c'),$$

ou bien

$$a^2 a'^2 a''^2 = a' a'' b' b'' . b^2 + a' a'' c' c'' . c + a' b' c'' a'' b' c' + a' b c'' . a'' b' c' . a'' b' c' .$$

De là, par la permutation tournante,

$$\begin{aligned} b^2 b'^2 b''^2 &= b' b'' c' c' . c^2 + b' b'' a' a'' a^2 + b' c'' a . b'' c a' + b' c a'' . b'' c' a \\ c^2 c'^2 c''^2 &= c' c'' a' a'' b^2 + c' c'' b' b'' a^2 + c' a'' a c'' a b'' + c' a b'' c . c'' a' b' . \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} a' a' a'' (b' b'' + c' c'') &= -a^2 a' a'^2, \\ b' b' b'' (c' c'' + a' a'') &= -b^2 b' b''^2, \\ c' c' c'' (a' a'' + b' b'') &= -c^2 c' c''^2. \end{aligned}$$

On aura donc, par addition,

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2(a^2 a'^2 a''^2 + b^2 b'^2 b''^2 + c^2 c'^2 c''^2) \\ &= a' b'' c . a'' b' c' + a'' b c' . a b' c' + a b' c'' . a' b' c \\ &\quad + a' b c'' . a'' b' c + a'' b' c . a b'' c' + a b'' c' . a' b c'' . \end{aligned}$$

Un calcul tout semblable donne

$$\Gamma = 2(a^2 b^2 c^2 + a' b'^2 c'^2 + a''^2 b''^2 c''^2);$$

de là l'équation (23).

L'équation suivante est plus compliquée. Si l'on fait

$$\begin{aligned} p &= a b' c'' + a' b'' c + a'' b c', & q &= a b^2 c' + a' b c'' + a'' b' c, \\ r &= a b' b'' + a' b'' b + a'' b b', & s &= a c' c'' + a' c'' c + a'' c c', \\ r' &= b c' c'' + b' c'' c + b'' c c', & s' &= b a' a'' + b' a'' a + b'' a a', \\ r'' &= c a' a'' + c' a'' a + c'' a a', & s'' &= c b' b'' + c' a'' b + c'' b b'; \end{aligned}$$

on aura l'équation (24) suivante,

$$(p - q)^2 = 15(a^2 a'^2 a''^2 + b^2 b'^2 b''^2 + c^2 c'^2 c''^2) \\ + (r - s)^2 + (r' - s')^2 + (r'' - s'')^2 + (p + q)^2;$$

ou bien, en vertu de l'équation (23),

$$(24) \quad (p - q)^2 + a^2 b^2 c^2 + a'^2 b'^2 c'^2 + a''^2 b''^2 c''^2 \\ = (4aa'a'')^2 + (4bb'b'')^2 + (4cc'c'')^2 + (r - s)^2 \\ + (r' - s')^2 + (r'' - s'')^2 + (p + q)^2.$$

Pour vérifier l'équation (24), on remarquera que l'on a

$$(p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq, \\ (r - s)^2 = (r + s)^2 - 4rs, \quad r + s = -3aa'a'';$$

d'où

$$(r - s)^2 = 9a^2 a'^2 a''^2 - 4rs.$$

De même

$$(r' - s')^2 = 9b^2 b'^2 b''^2 - 4r's', \\ (r'' - s'')^2 = 9c^2 c'^2 c''^2 - 4r''s''.$$

De sorte qu'en divisant par 4, l'équation (24) donne

$$rs + r's' + r''s'' = 6(a^2 a'^2 a''^2 + b^2 b'^2 b''^2 + c^2 c'^2 c''^2) = 3\Gamma + pq.$$

Or on trouve

$$rs = \Gamma + a^2 b' b'' c' c'' + a'^2 b'' b' c'' c + a''^2 b b' c c', \\ r's' = \Gamma + b^2 c' c'' a' a'' + b'^2 c'' c a'' a + b''^2 c c' a a', \\ r''s'' = \Gamma + c^2 a' a'' b' b'' + c'^2 a'' a b'' b + c''^2 a a' b b',$$

d'où, par l'addition,

$$rs + r's' + r''s'' = 3\Gamma + pq.$$

Voir Journal de M. Crelle, t. XXX, p. 46.

N. B. L'équation (16) donne

$$p - q = \pm 1.$$

Rien de plus facile que de trouver les solutions réelles du système (1) à (6), à trois indéterminées.

D'abord, les équations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

donnent, en posant

$$a'' = \cos \gamma,$$

puisque $a''^2 < 1$,

$$a = \sin \gamma \sin \varphi, \quad a' = \sin \gamma \cos \varphi, \quad a'' = \cos \gamma,$$

$$b'' = \sin \gamma \sin \psi, \quad c'' = \sin \gamma \cos \psi;$$

les équations (2) à (6) deviennent

$$b^2 + b'^2 = 1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi, \quad c^2 + c'^2 = 1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \psi,$$

$$b \sin \varphi + b' \cos \varphi = -\cos \gamma \sin \psi,$$

$$c \sin \varphi + c' \cos \varphi = -\cos \gamma \cos \psi,$$

$$bc + b'c' = -\sin^2 \gamma \sin \psi \cos \psi.$$

On tire de là

$$(b^2 + b'^2)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - (b \sin \varphi + b' \cos \varphi)^2$$

$$= 1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \psi - \cos^2 \gamma \sin^2 \psi;$$

ou bien

$$(b \cos \varphi - b' \sin \varphi)^2 = \cos^2 \psi,$$

ou encore

$$b \cos \varphi - b' \sin \varphi = i \cos \psi; \quad (i = \pm 1).$$

D'ailleurs

$$b \sin \varphi + b' \cos \varphi = -\cos \gamma \sin \psi,$$

de là

$$b = -\cos \gamma \sin \varphi \sin \psi + i \cos \varphi \cos \psi,$$

$$b' = -\cos \gamma \cos \varphi \sin \psi - i \sin \varphi \cos \psi.$$

On a aussi

$$c \cos \varphi - c' \sin \varphi = i' \sin \psi, \quad (i' = \pm 1),$$

$$c \sin \varphi + c' \cos \varphi = -\cos \gamma \cos \psi;$$

de là

$$c = -\cos \gamma \sin \varphi \cos \psi + i' \cos \varphi \sin \psi,$$

$$c' = -\cos \gamma \cos \varphi \cos \psi - i' \sin \varphi \sin \psi.$$

Ces valeurs réduisent l'équation

$$bc + b'c' = -\sin^2 \gamma \sin \psi \cos \psi$$

(51)

à

$$u' + \sin \varphi + \cos^2 \varphi = 0,$$

donc

$$u' = -1.$$

Ainsi i et i' sont de signes contraires. On a donc la solution générale (*).