

**Sur les propriétés attractives d'un
polygone. D'après M. le professeur
Joachimsthal (Ferdinand)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 451-454

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__451_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES PROPRIÉTÉS ATTRACTIVES D'UN POLYGONE ;
D'APRÈS M. LE PROFESSEUR JOACHIMSTHAL (FERDINAND).

Observation. On suppose la loi newtonienne d'attraction, et l'on prend pour unité de force attractive, l'attraction qu'exerce l'unité de masse à l'unité de distance. Toutes les dimensions sont évaluées en cette unité de distance.

1. THÉORÈME. *La base d'un triangle exerce sur le sommet opposé la même force attractive que l'arc de cercle intercepté entre les deux côtés, décrit du sommet comme centre avec un rayon égal à la distance du sommet à la base.*

Démonstration. Soient ABC un triangle, AB la base

(*) Cet ouvrage remarquable, très-rare, très-cher, très-gros, ne sera probablement jamais réimprimé. Un *Compendium* bien fait obtiendrait un grand succès. De tels travaux, s'ils étaient encouragés par le gouvernement, offriraient à nos jeunes agrégés un emploi de temps plus utile que dans l'éternelle composition de *Traites élémentaires* dont le besoin ne se fait souvent sentir qu'aux auteurs.

et C le sommet; CD la perpendiculaire abaissée du sommet C sur la base AB. Du point C comme centre, décrivons un arc de cercle intercepté entre les deux côtés CA, CB. Menons les rayons très-rapprochés Ce , Cf , et prolongeons-les respectivement jusqu'à la base en E et F; du point C comme centre, et avec le rayon CE, décrivons le petit arc de cercle EK, rencontrant CF prolongé en K. L'élément EF de la base exerce sur le sommet C une attraction $\frac{EF}{CE^2}$ (ce rapport multiplie l'unité de force); l'é-

lément ef de l'arc exerce l'attraction $\frac{ef}{Cc}$: il s'agit de prouver l'égalité de ces deux rapports. Divisant le premier rapport par le second, on obtient

$$\frac{\frac{EF}{CE^2}}{\frac{ef}{Cc}} = \frac{Ce \cdot CD \cdot EF}{ef \cdot CE^2} = \frac{CE}{EK} \cdot \frac{CD \cdot EF}{CE^2} = \frac{CD \cdot EF}{EK \cdot CE}.$$

Or $CD \cdot EF$ est le double de l'aire élémentaire CEF; $CE \cdot EK$ est le double de l'aire du secteur élémentaire CEK : ces deux aires ne diffèrent que de l'aire EFK, infiniment petit du second ordre. Ainsi le rapport géométrique de ces aires est égal à l'unité; donc les rapports $\frac{EF}{CE^2}$ et $\frac{ef}{Cc}$ sont égaux; donc, etc.

2. THÉORÈME. *Les attractions qu'exerce le périmètre d'un polygone convexe circonscrit à un cercle sur le centre de ce cercle, se détruisent.*

Démonstration. C'est un corollaire du théorème précédent. L'attraction du périmètre est la même que celle de la circonférence entière sur le centre.

3. Lemme. La distance du centre de gravité d'un arc

de cercle au centre, est une quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.

4. THÉORÈME. *L'attraction exercée par un arc de cercle sur le centre est égale à la corde divisée par le carré du rayon.*

Démonstration. Fixons au centre l'origine des coordonnées rectangulaires, et prenons pour axe des x le rayon qui passe par le milieu de l'arc. En décomposant chaque force attractive en deux forces, l'une agissant suivant l'axe des x , et l'autre perpendiculairement à cet axe, il est évident que le dernier système de forces est nul. ds étant l'élément de l'arc, la force attractive exercée par cet élément est $\frac{ds}{r^2}$; la composante suivant l'axe

des x est $\frac{x ds}{r^2}$; la somme de ces forces est donc $\frac{1}{r^2} \int S. x ds$.

Or $\int S. x ds$ est égal à l'arc total multiplié par la distance de son centre de gravité au centre, ou, d'après le lemme, au rayon multiplié par la corde; donc la force attractive totale est égale à la corde divisée par le carré du rayon.

Corollaire 1. Soient r le rayon, φ l'angle formé par les deux rayons qui vont aux extrémités de l'arc; la force attractive est $\frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}{r}$.

Corollaire 2. Soit un polygone convexe, inscrit dans une circonférence; abaissons du centre des perpendiculaires sur toutes les cordes, et portons sur chaque perpendiculaire, et suivant sa direction, une longueur égale à la corde respective. Si ces longueurs représentent, en grandeur et en direction, un système de forces, il est en équilibre; car, en vertu du théorème, ce système a pour résultante l'attraction de la circonférence sur le centre. Ce résultat est aussi évident par une autre considération. Un système de forces, représentées en grandeur et en direction

par les côtés du polygone, se réduit à un couple. Donc ces forces, transportées parallèlement à elles-mêmes au centre, se font équilibre. Faisant faire au système un quart de révolution, l'équilibre subsistera toujours, et les forces deviennent perpendiculaires aux cordes respectives.

Observation. A l'aide du théorème 1, on peut trouver l'attraction d'un polygone plan sur un point situé dans son plan.

Le théorème 1 est extrait du *Journal de Mathématiques* de Dublin et Cambridge, édité par M. W. Thomson; février 1848, page 94. L'éditeur dit que ce théorème, énoncé par M. Joachimsthal, se trouve déjà dans la Dynamique de Earnshaw; mais le théorème 2, restreint au triangle, est de M. Joachimsthal.