NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. BRASSINNE

Analogie entre une question d'algèbre et une question de calcul intégral

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 434-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__434_0>

ANALOGIE ENTRE UNE QUESTION D'ALGÈBRE ET UNE QUESTION DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. E. BRASSINNE

1°. Si l'on veut trouver les conditions pour que deux équations algébriques entières,

(1) $$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

aient une, deux, trois, etc., solutions communes, il suffit d'exprimer que leurs premiers membres ont un diviseur commun, du premier, du deuxième, du troisième, etc., degré. Lagrange, dans un Mémoire d'algèbre, donne un procédé élégant pour trouver les conditions qui expriment que les équations proposées ont p solutions communes. Il considère, pour cet effet, le système $f(x) + V = 0$ et $F(x) = 0$, puis il élimine x entre ces deux équations; le reste final, fonction de V, devra avoir p valeurs nulles de cette variable, si les proposées ont p solutions communes, le dernier terme de ce reste et les $(p-1)$ dérivées, par rapport à V, devront donc être nulles pour l'hypothèse $V = 0$. De plus, comme V s'ajoute au dernier terme q de $f(x)$, et que d'ailleurs V doit être égale à zéro, il suffira, en général, de chercher le commun diviseur entre $f(x)$ et $F(x)$; le reste final indépendant de x sera nul, s'il y a une solution commune; ses dérivées successives par rapport à q seront nulles, s'il y a plusieurs solutions communes.

2°. Le raisonnement de Lagrange s'applique sans difficulté au système de deux équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des fonctions algébriques entières de x. En effet (comme je l'ai démontré en 1842, *Mémoires de l'Académie de Toulouse*), pour trouver les solutions communes entre deux équations de l'ordre $m+p$ et p de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} X_{m+p} = \dfrac{d^{m+p}y}{dx^{m+p}} + A\dfrac{d^{m+p-1}y}{dx^{m+p-1}} + \ldots + Qy = 0, \\ X_p = \dfrac{d^p y}{dx^p} + A'\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \ldots + Q'y = 0, \end{cases}$$

on pose la suite d'identités

$$X_{m+p} = \frac{d^m(X_p)}{dx^m} + X_{m+p-1},$$

$$X_{m+p-1} = K\frac{d^{m-1}(X_p)}{dx^{m-1}} + X_{m+p-2},$$

$$X_{m+p-2} = L\frac{d^{m-2}(X_p)}{dx^{m-2}} + X_{m+p-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

K, L, etc., étant des coefficients déterminés, de telle sorte que le terme de l'ordre le plus élevé se détruisant au premier et au second membre, les restes successifs que donneront de simples additions ou soustractions soient d'un ordre moindre d'une unité que les fonctions du premier membre. Ce procédé, appliqué aux deux équations proposées, conduira à un dernier reste fonction de x seul, qui devra être nul de lui-même si $X_{m+p} = 0$ et $X_p = 0$ ont une solution commune. Deux, trois, etc., solutions communes, auraient entraîné l'annulation identique d'une fonction du premier, deuxième, troisième ordre.

Pour appliquer au système proposé le procédé de Lagrange, remplaçons le dernier terme Qy du système (2) par $(Q+V)y$ et procédons à la recherche des solutions communes du système (2) ainsi modifié [on pourrait aussi ajouter la fonction arbitraire V au premier membre d'une des équations (2)]. On poursuivra l'opération jusqu'à ce qu'on trouve un reste final, fonction de x et de V; ce reste algébrique devra donner pour V autant de valeurs nulles qu'il y a de solutions communes.

Dans les opérations successives relatives à la recherche des solutions communes entre les deux fonctions $X_{m+p} + Vy = o$ et $X_p = o$, on pourra se dispenser de prendre les dérivées par rapport à V, bien que cette quantité, par la substitution des solutions de $X_p = o$ dans $X_{m+p} + Vy = o$, soit fonction de x. Si, en effet, on faisait varier V, le résultat final serait de la forme

$$\varphi(x)\frac{d^k V}{dx^k} + \varphi_1(x)\frac{d^{k-1} V}{dx^{k-1}} + \ldots + F(x, V);$$

pour une solution commune, ce dernier reste, égalé à zéro, doit donner une valeur de V nulle; mais V étant alors égal à une fonction de x, identiquement égale à zéro, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, etc., seront nulles, et la condition relative à une valeur de $V = o$ sera fournie par la relation $F(x, V) = o$ dont le terme indépendant de V devra s'anéantir de lui-même. Deux, trois, etc., solutions communes donneront à $F(x, V) = o$ deux, trois racines nulles. Ce procédé est très-long dans l'application; il est intéressant en ce qu'il établit une analogie de plus entre les équations algébriques et les équations différentielles.