

GUSTAVE MARQFOY

**Solution d'une question énoncée sur les aires
des triangles rectilignes ou sphériques**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 429-430

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_429_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UNE QUESTION ÉNONCÉE SUR LES AIRES DES
TRIANGLES RECTILIGNES OU SPHÉRIQUES**

(voir t. IX, p. 278);

PAR **M. GUSTAVE MARQFOY**,
Institution Sainte-Barbe.

Soient a, b, c les côtés; A, B, C les angles; p le demi-périmètre; S l'aire d'un triangle, soit rectiligne, soit sphérique; dans ce dernier cas S désigne l'excès sphérique : on a les deux théorèmes

$$(1) \quad p^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = S,$$

$$(2) \quad \sin^2 p \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{S}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

On demande comment on passe du second théorème au premier.

Démonstration. Dans la formule (2), p , a , b , c représentent des nombres de degrés, ou bien des longueurs d'arcs comptées dans la sphère de rayon 1.

Si l'on veut introduire des longueurs d'arcs a_1, b_1, c_1 , etc., comptées dans une sphère de rayon R , on a la relation

$$a = \frac{a_1}{R};$$

et comme l'excès sphérique $= \frac{S}{R^2}$, en rapportant la surface du triangle sphérique au carré, la formule (2) est équivalente à la suivante :

$$\sin^2 \frac{p_1}{R} \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{S}{R^2} \cos \frac{a_1}{2R} \cos \frac{b_1}{2R} \cos \frac{c_1}{2R}.$$

On peut l'écrire de la manière suivante :

$$\frac{p_1^2}{R^2} \left(\frac{\sin \frac{p_1}{R}}{\frac{p_1}{R}} \right)^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{S}{R^2} \cdot \frac{\sin \frac{S}{2R^2}}{\frac{S}{2R^2}} \cos \frac{a_1}{2R} \cos \frac{b_1}{2R} \cos \frac{c_1}{2R}$$

Si l'on suppose que le rayon devienne infini, après avoir supprimé le facteur $\frac{1}{R^2}$, commun aux deux membres, cette formule devient

$$p_1^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = S.$$

Observation. M. Tillol, professeur à Castres, résout la question en employant des séries (page 406).