NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur la formation de deux séries qu'on rencontre dans la dissertation suivante de M. Gauss : « Summatio quarumdam serierum singularium ». D'après M. le Professeur E. Heine, de Bonn

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 414-417

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__414_0>

SUR LA FORMATION

De deux séries qu'on rencontre dans la dissertation suivante de M. Gauss : *Summatio quarumdam serierum singularium ;*

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR E. HEINE, DE BONN.

(Journal de M. Crelle, tome XXXIX, page 288; 1850.)

1. *Principe général.* Soit

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum^{\infty} \mathrm{A}_n x^n ;$$

c'est-à-dire que $\mathrm{F}(x)$ est développé suivant une série infinie, n prenant toutes les valeurs entières positives, comprises entre 0 et ∞. Si $\mathrm{F}(x)$ est décomposable en facteurs, et si l'on peut développer chacun de ces facteurs en série infinie, le produit de ces séries est identiquement égal à la série (1); A_n, coefficient de x^n, sera donc égal à la somme des séries qui donnent x^n dans le produit des facteurs.

Ce qui suit est une application de ce principe.

2. *Lemme.*

$$\frac{1}{(1-z)(1-rz)(1-r^2z)}\ldots = 1 + \frac{z}{1-r} + \frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)} + \frac{z^3}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)} + \ldots.$$

Démonstration. Soit

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-rz)}\ldots = 1 + \mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 z^2 + \mathrm{A}_3 z^3 \ldots;$$

d'où

$$\begin{aligned} f(rz) = (1-z) f(z) &= 1 + \mathrm{A}_1 rz + \mathrm{A}_2 r^2 z^2 + \ldots \\ &= (1-z)(1 + \mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 z^2 + \mathrm{A}_3 z^4 + \ldots). \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des puissances semblables, on trouve

$$A_1 = \frac{1}{1-r},\quad A_2 = \frac{1}{(1-r)(1-r^2)}\cdots$$

3. Théorème. La série

$$1 - \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \cdots$$

est nulle lorsque n est *impair,* et lorsque n est *pair* la série est égale à

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots(1-q^{n-1}). \qquad \text{(Gauss.)}$$

Démonstration. Dans la série du *lemme,* faisons $z = x^2$ et $r = q^2$, nous obtenons

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-q^2x^2)(1-q^4x^2)}\cdots = 1 + \frac{x^2}{1-q^2}$$
$$+ \frac{x^4}{(1-q^2)(1-q^4)}\cdots + \frac{x^n}{(1-q^2)\ldots(1-q^n)}.$$

Le premier membre se décompose en deux facteurs, savoir:

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}\cdots = 1 + \frac{x}{1-q} + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)} + \cdots$$
$$\frac{1}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)}\cdots = 1 - \frac{x}{1-q} + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}\cdots.$$

Faisant le produit, on obtient, pour le coefficient de x^n,

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}\left[1 - \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} - \cdots\right].$$

Ainsi, lorsque n est *impair,* le facteur enfermé entre crochets est nul, et lorsque n est *pair,* on obtient (ayant égard au coefficient A_n donné ci-dessus),

$$1-\frac{1-q^n}{1-q}+\ldots=\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q^2)(1-q^5)\ldots(1-q^n)}$$
$$=(1-q)(1-q^3)\ldots(1-q^{n-1}).$$

C. Q. F. D.

4. Théorème. n étant un nombre entier positif, on a

$$1+\frac{(1-q^n)}{(1-q)}q^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{\frac{2}{2}}$$
$$+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}q^{\frac{3}{2}}+\ldots$$
$$=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{3}{2}}\right)\ldots\left(1+q^{\frac{n}{2}}\right).$$

(Gauss.)

Démonstration. Dans le § 2, faisons $r=q^{\frac{1}{2}}$ et $z=x$; on obtient

$$\frac{1}{(1-x)\left(1-xq^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-xq^{\frac{2}{2}}\right)\ldots}=1+\frac{x}{1-q^{\frac{1}{2}}}+\ldots$$
$$+\frac{x^n}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}\right)\ldots\left(1-q^{\frac{n}{2}}\right)}.$$

Le premier membre se décompose en deux facteurs, savoir :

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\ldots}=1+\frac{x}{1-q}$$
$$+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots+\frac{x^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)},$$

$$\frac{1}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}x\right)\left(1-q^{\frac{3}{2}}x\right)\ldots}=1+\frac{xq^{\frac{1}{2}}}{1-q}$$
$$+\frac{x^2q^{\frac{2}{2}}}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots+\frac{x^nq^{\frac{n}{2}}}{(1-q)\ldots(1-q^n)}.$$

Faisant le produit, on obtient, pour le coefficient de x^n,

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}\left[1+\frac{1-q^n}{1-q}q^{\frac{2}{1}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{\frac{2}{2}}+\ldots\right].$$

Comparant avec le coefficient A_n ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{1-q^n}{1-q}q^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{\frac{2}{2}}+\ldots \\ &=\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-q^{\frac{2}{2}}\right)\ldots\left(1-q^{\frac{n}{2}}\right)} \\ &=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{3}}\right)\ldots\left(1+q^{\frac{n}{2}}\right). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Observation. C'est de ces deux séries que le prince des arithmologues du siècle a déduit la loi de réciprocité pour les restes quadratiques; loi qui a reçu une grande extension par les découvertes de MM. Jacobi, Dirichlet, et par les récents travaux de M. Eisenstein, jeune arithmologue célèbre dès son début, Hermite de l'Allemagne.