

Théorème de M. Jacobi sur une série

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 410-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__410_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THEOREME DE M. JACOBI SUR UNE SÉRIE.

(Journal de M. Crelle, t. XXI. p. 13; 1842.)

1. Euler a démontré que l'on a

$$\begin{aligned} (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots &= 1-x-x^2+x^5+x^7-x^8+\dots \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}, \end{aligned}$$

x est quelconque, et l'on prend pour m successivement tous les nombres entiers compris entre $-\infty$ et $+\infty$; on voit que l'exposant de x est le nombre figuré dit *pentagonal*.

Voici le théorème de M. Jacobi :

THÉORÈME.

$$(1) \left[\sum_{+\infty}^{-\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}} \right]^3 = \sum_0^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}},$$

où x est quelconque; pour m , on met tous les entiers compris entre $-\infty$ et $+\infty$, et pour n les entiers positifs entre 0 et ∞ ; de sorte qu'on a

$$[1-x-x^2+x^5+x^7\dots]^3 = 1-3x+5x^3-7x^6\dots;$$

les exposants de x , dans le second membre, sont les nombres trigonaux.

Démonstration. Faisons $a = 6m + 1$, $b = 2n + 1$; m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et n un nombre entier positif; avec ces conditions, on a

$$(2) \sum (-1)^{\frac{a-b}{2}} b (a^2 - b^2) x^{a^2+3b^2} = 0 \quad (\text{voir p. 174}),$$

$$\frac{a-b}{2} = 3m-n, \quad \frac{a+b}{2} = 3m+n+1,$$

$$a^2 - b^2 = 4(3m-n)(3m+n+1),$$

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} = (-1)^{3m-n} = (-1)^{m+n};$$

ainsi l'équation (2) devient

$$(3) \sum (-1)^{m+n} (2n+1)(3m-n)(3m+n+1) x^{(6m+1)^2+3(2n+1)^2} = 0;$$

divisant par x^4 , l'exposant de x devient

$$36m^2 + 12m + 3(4n^2 + 4n);$$

mais x étant quelconque, on peut remplacer x par $x^{\frac{1}{24}}$; alors l'exposant de x devient

$$\frac{3m^2 + m}{2} + \frac{n^2 + n}{2},$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \sum (-1)^{m+n} (2n+1) [3(3m^2+m) - (n^2+n)] x^{\frac{3m^2+m}{2} + \frac{n^2+n}{2}} =$$

De là, on déduit

$$(5) \frac{3 \sum (-1)^m (3m^2+m) x^{\frac{3m^2+m}{2}}}{\sum (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}} = \frac{\sum (-1)^n (2n+1) (n^2+n) x^{\frac{n^2+n}{2}}}{\sum (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}}$$

ou bien, divisant par $2x$ et multipliant ensuite par dx et intégrant, on obtient

$$\sum (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}} = \sum (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}. \text{ C. Q. F. D.}$$

L'illustre analyste déduit de ce qui précède les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. *Soit un nombre entier p de la forme $24n + 3$, et qui ne soit pas le triple d'un carré; si l'on décompose ce nombre de toutes les manières possibles en trois carrés, chacun de la forme $(6m \pm 1)^2$, deux de ces carrés peuvent être égaux; supposez que l'on compte double le cas où les trois carrés sont inégaux; le nombre de décompositions répondant à trois valeurs de m , l'une paire et les deux autres impaires, ou bien toutes les trois paires, est égal au nombre de décompositions correspondant à trois valeurs en m , l'une impaire et les deux autres paires, ou les trois impaires.*

THÉORÈME 2. *Mêmes données et mêmes décompositions que dans le théorème précédent, mais $p \equiv 3b^2$; les deux nombres de décompositions égaux dans le précédent théorème ne sont plus égaux; le premier nombre surpasse le second, si b est de la forme $4 + 1$, et le second nombre surpasse le premier, si b est de la forme $4 - 1$; l'excès est égal à $\frac{1}{3}b$, si b est divisible par 3, et au nombre le plus approché de $\frac{1}{3}b$, lorsque b n'est pas divisible par 3.*

THÉORÈME 3. *On peut donner à tout nombre entier la forme*

$$\alpha' + 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 6\delta^2,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres entiers.

Observation. Le premier exemple d'une série continue à puissances croissantes, et dont les exposants forment une progression arithmétique du second ordre, a été donné par Euler (*Introductio in Analysin, de partitione numerorum*, § CCCXXIII; année 1748), et il en a donné une démonstration rigoureuse dans les Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg (tome IV, première partie, 1780, page 41); voyez aussi *Théorie des nombres* (tome III, page 128, 3^e édition; 1830). M. Jacobi a fait voir que ce théorème découle de sa nouvelle théorie sur les développements des fonctions elliptiques (*Fundamenta*, § LXVI, équation 6, page 185; année 1829); dans ce même immortel ouvrage, l'auteur donne le premier exemple d'une série dont les exposants procèdent suivant la suite pentagonale égale à une série dont les exposants procèdent suivant la suite trigonale (*Fundamenta*, page 186); et il a donné ensuite de ce dernier théorème une démonstration élémentaire que nous avons ci-dessus essayé de faire connaître.
