

Théorème de M. Steiner sur des axes rectangulaires dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 407-408

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__407_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

THÉOREME DE M. STEINER SUR DES AXES RECTANGULAIRES DANS LES CONIQUES.

THÉOREME. *Par une origine fixe, prise dans le plan d'une conique, menons deux droites rectangulaires quelconques; soient a et b les portions de ces droites interceptées par la conique; x' , x'' les segments de a formés au point fixe; y' , y'' les segments de b formés au point fixe; la quantité $\frac{a^2}{x'x''} + \frac{b^2}{y'y''}$ est constante.*

Démonstration. Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

l'équation de la conique; axes rectangulaires et le point fixe étant pris pour origine; passant aux coordonnées po-

lares, on a

$$z^2 (A \sin^2 \varphi + B \sin \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi) + z (D \sin \varphi + E \cos \varphi) + F = 0.$$

Désignons par z' , z'' les deux rayons vecteurs correspondants à la même valeur de φ ; on aura

$$\begin{aligned} \frac{(z' - z'')^2}{z'^2 z''^2} &= \frac{(z' + z'')^2 - 4z'z''}{z'^2 z''^2} \\ &= \frac{(D \sin \varphi + E \cos \varphi)^2 - 4F(A \sin^2 \varphi + B \sin \varphi \cos \varphi + C \cos^2 \varphi)}{F^2}. \end{aligned}$$

Remplaçant φ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$, et désignant par z'_1 , z''_1 les deux rayons vecteurs correspondants à cet angle, on aura

$$\begin{aligned} \frac{(z'_1 - z''_1)^2}{z'^2_1 z''^2_1} \\ &= \frac{(D \cos \varphi - E \sin \varphi)^2 - 4F(A \cos^2 \varphi - B \sin \varphi \cos \varphi + C \sin^2 \varphi)}{F^2}, \end{aligned}$$

ajoutant les seconds membres des deux équations, on obtient

$$\frac{D^2 + E^2 - 4AF - 4CF}{F^2},$$

quantité indépendante de φ .

C. Q. F. D.

Observation. Le même théorème subsiste, dans les surfaces du second degré, pour trois axes rectangulaires, et c'est là le théorème général énoncé par M. Steiner et qui reste à démontrer.
