Nouvelles annales de mathématiques

H. Rouart

Théorème sur les polygones superposés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__400_0>

THÉORÈME SUR LES POLYGONES SUPERPOSÉS;

PAR M. H. ROUART,
Élève du lycée Louis-le-Grand, classe de M. Beynac.

THÉORÈME. *Si l'on place l'un sur l'autre deux polygones convexes d'un même nombre de côtés, de manière que deux côtés consécutifs de l'un soient coupés par un côté de l'autre; on obtient une suite de triangles saillants; le produit des côtés extérieurs de rang impair est égal à celui des côtés de rang pair.*

Démonstration. Soit n le nombre des côtés de chaque polygone; on forme $2n$ triangles extérieurs, ayant deux à deux un angle égal comme opposé par le sommet. Désignons par $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2n}$ les aires des triangles, par a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ les côtés extérieurs, et par $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ les côtés intérieurs successifs; on a la suite de rapports égaux :

$$\begin{array}{c} t_1 : t_2 :: a_1\, b_1 : a_2\, b_2, \\ t_2 : t_3 :: a_3\, b_2 : a_4\, b_3, \\ t_3 : t_4 :: a_5\, b_3 : a_6\, b_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{i-2} : t_{i-1} :: a_i\, b_{i-2} : a_{i+1}\, b_{i-1}, \\ t_{i-1} : t_i :: a_{i+1}\, b_{i-1} : a_{i+2}\, b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{2n} : t_1 :: a_{4n-1}\, b_{2n} : a_{4n} b_1. \end{array}$$

Multipliant par ordre, et supprimant les facteurs communs, on obtient

$$a_1\, a_3\, a_5 \ldots a_{4n-1} = a_2\, a_4\, a_6 \ldots a_{4n}.$$

C. Q. F. D.