

F.-A. BEYNAC

Sur le degré de multiplicité des racines

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 317-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__317_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LE DEGRÉ DE MULTIPLICITÉ DES RACINES ;

PAR M. F.-A. BEYNAC,

Maître de conférences au lycée Louis-le-Grand.

1. THÉORÈME. *Si une équation a un terme indépendant de l'inconnue, cette équation ne peut avoir des racines dont le degré de multiplicité soit égal ou supérieur au nombre de ses termes.*

Démonstration. Une telle équation ne peut avoir de racines nulles. Supposons que le théorème soit démontré pour une équation ayant n termes ; je dis que le théorème subsiste aussi pour une équation ayant $n + 1$ termes. Car, si cette dernière équation avait une racine dont le degré de multiplicité fût égal ou supérieur à $n + 1$, la dérivée qui n'a plus que n termes aurait donc cette même racine, d'après la théorie connue, avec un degré de multiplicité égal ou supérieur à n ; ce qui est contraire à l'hypothèse. Or, le théorème est évident pour des équations à deux termes. Donc, etc.

2. THÉORÈME. *Si un nombre entier est racine multiple d'une équation n'ayant que des coefficients entiers et l'unité pour premier coefficient, une puissance de ce nombre marquée par le degré de multiplicité divise le dernier terme de l'équation, et les puissances inférieures successives divisent respectivement les coefficients de x , x^2 , etc.*

Démonstration. Soit

$$fx = x^m + C_{m-1}x^{m-1} + C_{m-2}x^{m-2} + \dots + C_2x^2 + C_1x + C_0.$$

Soit n le degré de multiplicité d'une racine α ; le polynôme $f(x)$, divisé par $(x - \alpha)^n$, donne pour quotient

un polynôme entier de degré $m - n$; représentons ce polynôme par $\varphi(x)$, de sorte que

$$\varphi x = x^{m-n} + D_{m-n-1} x^{m-n-1} + \dots + D_2 x^2 + D_1 x + D_0,$$

et

$$\psi(x) = (x - \alpha)^n = x^n + E_{n-1} \alpha x^{n-1} + E_{n-2} \alpha^2 x^{n-2} + \dots + E_2 \alpha^{n-2} x^2 + E_1 \alpha^{n-1} x + E_0 \alpha^n;$$

ainsi on a l'identité

$$fx = \varphi(x)\psi(x).$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de x , on obtient

$$\begin{aligned} C_0 &= D_0 E_0 \alpha^n, \\ C_1 &= D_1 E_0 \alpha^n + D_0 E_1 \alpha^{n-1}, \\ C_2 &= D_2 E_0 \alpha^n + D_1 E_1 \alpha^{n-1} + D_0 E_2 \alpha^{n-2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Les quantités C, D, E étant des nombres entiers, il s'ensuit que C_0, C_1, C_2, \dots , sont respectivement divisibles par $\alpha^n, \alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \dots$. C. Q. F. D.

Observation. α et n étant connus, le même système d'équations donne les valeurs des quantités D ; car les quantités E sont des coefficients binomiaux connus.

Observation. On peut étendre cette méthode aux racines commensurables fractionnaires.

THÉORÈME. *Si une équation réciproque a des racines multiples, la transformée en $x + \frac{1}{x}$ en a aussi au même degré de multiplicité.*

En effet, soit α une racine quelconque de l'équation réciproque

$$f(x) = 0,$$

$\frac{1}{\alpha}$ sera aussi racine, et $f(x)$ est divisible par

$$(x - \alpha)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned} (x - \alpha) \left(x - \frac{1}{\alpha} \right) &= x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) x + 1 \\ &= x \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Si n désigne le degré de l'équation, $f(x)$ sera composé de $\frac{n}{2}$ facteurs de cette forme. Or, pour passer de cette équation à la transformée, il faut diviser $f(x)$ par $x^{\frac{n}{2}}$, ce qui revient à diviser chaque facteur par x , puisque leur nombre est $\frac{n}{2}$. La transformée se composera donc de facteurs de la forme

$$\left[\left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right].$$

Cela posé, soit p le degré de multiplicité de la racine α ; $f(x) = 0$ admettra aussi p fois la racine $\frac{1}{\alpha}$, et le premier membre de l'équation sera divisible par

$$(x - \alpha)^p \times \left(x - \frac{1}{\alpha} \right)^p = x^p \left[x + \frac{1}{x} - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^p.$$

Après la division par $x^{\frac{n}{2}}$, il restera dans la transformée en $x + \frac{1}{x}$ le facteur

$$\left[\left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right]^p.$$

Donc la transformée a des racines multiples au même degré de multiplicité que la proposée.
