Nouvelles annales de mathématiques

Théorème de Mac-Cullagh sur le triangle inscrit dans l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 296-298

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__296_1>

THOÉREME DE MAC-CULLAGH (*) SUR LE TRIANGLE INSCRIT DANS L'ELLIPSE.

1. *Lemme.* Soient une ellipse ayant pour grand axe AB, et une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre, dans le même plan; soient M, N deux points sur l'ellipse; M', N' deux points projectivement correspondants sur la demi-circonférence. Par le centre O, menons le demi-diamètre OP parallèle à la corde MN, nous aurons la proportion

$$\text{corde MN} : \text{corde M}'\text{N}' :: \text{OP} : \text{OA}.$$

Démonstration. Par le point M, menons une parallèle à la corde M'N', et soit Q le point où cette parallèle rencontre la droite NN'; P' étant le point projectivement correspondant de P, joignons O et P'; OP', projection de OP, est donc parallèle à M'N' ou à MQ; les deux triangles QMN et P'OP sont donc semblables, comme ayant les côtés parallèles. Comparant les côtés homologues, on obtient

$$\text{MN} : \text{MQ} :: \text{OP} : \text{OP}';$$

or

$$\text{MQ} = \text{M}'\text{N}', \quad \text{OP}' = \text{OA};$$

donc, etc.

2. *Lemme.* L'aire d'un triangle inscrit dans une ellipse est égale au produit des trois côtés multiplié par

(*) Prononcez *Maccol.*

le produit des deux demi-axes et divisé par quatre fois le produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle.

Démonstration. Soient LMN un triangle inscrit dans une ellipse et L′M′N′ le triangle projectivement correspondant dans la circonférence décrite sur le grand axe de l'ellipse; faisons $LM=n$, $MN=l$, $NL=m$, $M'L'=n'$, $M'N'=l'$, $N'L'=m'$; et soient a le demi-grand axe et b le demi-petit axe; λ, μ, ν les demi-diamètres respectivement parallèles aux côtés MN, LN, LM : on a, en vertu du lemme précédent,

$$l'=\frac{al}{\lambda},\qquad m'=\frac{am}{\mu},\qquad n'=\frac{an}{\nu};$$

d'où

$$l'm'n'=\frac{a^3\,lmn}{\lambda\mu\nu}=4a\,S'=\frac{4a^2}{b}\,S;$$

et de là

$$S=\frac{ab\,.\,lmn}{4\lambda\mu\nu}.\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Théorème. *Un triangle étant inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle, et divisé par le produit des deux demi-axes.*

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme précédent.

Corollaire. Lorsque les trois sommets du triangle se réunissent, on obtient pour la valeur du rayon de courbure le cube du demi-diamètre parallèle à la tangente, divisé par le produit des deux demi-axes; expression connue.

Observation. M. Joachimsthal a énoncé et démontré ce théorème en avril 1849 (Crelle, t. XXXIX, p. 138; en français); mais ce même théorème avait déjà été publié par feu le professeur Mac-Cullagh, dans le *Dublin Universit. Calendar,* an. 1837, et a été démontré dans le

Traité des sections coniques de M. Georges Salmon, savant professeur de la même Université. Mac-Cullagh a, de plus, donné l'énoncé suivant du même théorème, qui le rend applicable à la parabole :

« Le carré du rayon du cercle circonscrit est égal au » produit des trois cordes passant par le foyer parallèle- » ment aux côtés du triangle, divisé par quatre fois le » paramètre de la conique ». Ce qui est évident, puisqu'une corde passant par le foyer est égale au double du carré du demi-diamètre parallèle, divisé par le demi-grand axe. Ce renseignement est consigné dans une Lettre de M. le professeur Salmon à M. Crelle (t. XXXIX, p. 365, 11 février 1850; en français). Le théorème est encore à démontrer pour l'hyperbole.