NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Propriétés générales des courbes algébriques planes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 283-296

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__283_1>

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES.

1. Deux courbes algébriques planes se coupent en un nombre de points égal au produit des deux nombres indiquant les degrés des courbes.

Observation. Dans tout ce qui suit, on suppose une courbe de degré n.

2. *Théorème segmentaire de Newton.* Par un point O pris dans le plan de la courbe, on mène deux transversales de *directions données*. Chaque transversale forme n segments à compter du point O. Le produit des segments formés par la transversale de la première direction, divisé par le produit de la transversale de la seconde direction, donne un quotient constant quel que soit le point O.

Démonstration, voir tome III, pages 416 et 510.

3. *Théorème segmentaire de Carnot*. Soit un polygone de p côtés tracé dans le plan de la courbe; soient A_1, A_2, A_3, .., A_p les sommets consécutifs du polygone. Considérant A_1, A_2, A_3,..., A_p successivement comme des points fixes, les sécantes A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{p-1}A_p$ formeront chacune n segments et en tout pn segments: relativement aux points fixes A_1, A_p, A_{p-1},..., A_2 et aux sécantes A_1A_p, A_pA_{p-1}, $A_{p-1}A_{p-2}$,..., A_2A_1, on aura mn autres segments; le produit des mn premiers segments est égal au produit des mn seconds segments.

Démonstration, voir tome IV, page 526.

4. *Théorème segmentaire général*. Par le point O pris dans le plan de la courbe et non sur la courbe, on mène une transversale formant en O des segments en nombre n. Soit $F_n+F_{n-1}+F_r\ldots+F_1+F_0=0$ l'équation de la courbe; F_r désigne une fonction homogène entière de degré r, entre les coordonnées de la courbe; soient s_r la combinaison des n segments pris r à r; Q un point pris sur la transversale et déterminé de manière qu'en faisant $OQ=q$, on ait la relation

$$\alpha_m s_{n-m} q^m + \alpha_{m-1} s_{n-m+1} q^{m-1} + \alpha_{m-2} s_{n-m+2} q^{m-2} + \ldots \alpha_0 s_n = 0,$$

où α_m, α_{m-1},..., α_0 sont des constantes données et où m ne surpasse pas n; le lieu géométrique du point q est donné par l'équation

$$\alpha_m F_m - \alpha_{m-1} F_{m-1} + \alpha_{m-2} F_{m-2} + \ldots + \alpha_0 (-1)^m F_0 = 0.$$

Démonstration. La même que pour les surfaces et sera donnée plus loin.

5. *Théorème segmentaire général*. Mêmes données que dans le théorème précédent; mais la relation seg-

mentaire est celle-ci :

$$s_{n-m}q^m - (n-m+1)s_{n-m+1}q^{m-1}$$
$$+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}s_{n-m+2}q^{m-2}+\ldots+s_n(-1)^m=0.$$

Le lieu du point Q est représenté par l'équation

$$F_m+(n-m+1)F_{m-1}+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}F_{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{(n-m+1)\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots m}F_0=0.$$

Corollaire. Les diamètres de Newton et la collinéation des centres harmoniques de Cotes et Mac-Laurin.

Démonstration. La même que pour les surfaces et sera donnée plus loin.

6. *Premier théorème de Newton sur les asymptotes.* Les n asymptotes coupent la corde en $n(n-2)$ points situés sur une ligne de degré $n-2$.

Démonstration, voir tome VII, pages 385 et 422.

7. *Second théorème de Newton sur les asymptotes.* Les n asymptotes rencontrent une transversale en n points dont le centre de moyenne distance est le même que le centre de moyenne distance des n points d'intersection de la courbe avec la transversale (voir *ibid.*).

8. *Théorème segmentaire de Mac-Laurin sur les tangentes.* Par un point O menons deux transversales; par les n points d'intersection de la première transversale, menons n tangentes qui rencontrent en n points la seconde transversale; le centre des moyennes harmoniques de ces n points de rencontre pris par rapport au point O, est le même que le centre des moyennes harmoniques des n points d'intersection de la seconde transversale avec la courbe, et pris aussi par rapport au point O.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la méthode perspective au théorème précédent; nous verrons d'ailleurs que ce théorème est l'énoncé géométrique d'un théorème analytique d'Euler généralisé par M. Jacobi.

Observation. Lorsque la seconde transversale ne rencontre pas la courbe, le théorème subsiste encore; le centre des moyennes harmoniques des n points d'intersection des n tangentes avec la seconde transversale est donné par l'intersection de cette transversale avec la droite des centres harmoniques.

9. *Théorème de M. Poncelet sur le faisceau tangentiel.* Un faisceau de tangentes partant d'un point touche la courbe en $n(n-1)$ points, et ces $n(n-1)$ points de contact sont sur une ligne de degré $n-1$, nommée *première polaire* du sommet du faisceau.

Démonstration, voir tome VII, page 311.

Corollaires. 1°. Par un point donné sur la courbe, on ne peut mener que $n(n-1)-2$ tangentes; car la tangente en ce point compte pour deux tangentes dirigées en sens opposés.

2°. On ne peut mener que $n(n-1)-2$ tangentes parallèles à une asymptote; car cette asymptote compte pour deux tangentes.

3°. On ne peut mener que $n(n-1)-2$ tangentes parallèles à une tangente dont le point de contact est un point d'inflexion; car cette tangente est *double*.

4°. Par un point d'inflexion on ne peut mener que $n(n-1)-3$ tangentes; car cette tangente au point d'inflexion compte pour *trois*.

10. *Théorème de MM. Cayley et Joachimsthal sur le faisceau tangentiel.* Le faisceau de tangentes partant d'un point coupe la courbe en $n(n-1)(n-2)$ points situés sur une ligne de degré $(n-1)(n-2)$; cette courbe et celle des points de contact ont $(n-1)(n-2)$ tangentes communes passant par le sommet du faisceau.

Démonstration, voir page 104.

11. *Théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles.* Lorsque le sommet du faisceau tangentiel est à l'infini, le centre des moyennes distance des $n(n-1)$ points de contact reste fixe, quelle que soit la direction des tangentes.

Démonstration, voir tome IV, page 153.

Observation. En appliquant la méthode perspective, on obtient un théorème sur des centres de moyennes harmoniques.

12. *Théorème sur les tangentes.* Une transversale coupant la courbe en n points, on mène en chacun de ces points une tangente, le système de ces n tangentes rencontre la courbe en $n(n-2)$ points, situés sur une ligne d'ordre $n-2$.

Démonstration. On projette la transversale à l'infini et l'on revient au théorème 6.

13. *Théorème sur les coefficients différentiels.* Une courbe algébrique de degré n étant rapportée à des axes rectilignes, le point de moyenne distance de tous les points où les coefficients différentiels d'un ordre *donné* sont égaux à un nombre donné, est un point fixe, quel que soit le nombre donné; mais ce point change avec l'ordre du coefficient différentiel et avec les axes; dernier changement qui n'a pas lieu lorsque le coefficient différentiel est du premier ordre.

Démonstration, voir tome IV, page 155.

14. *Théorème de M. Duhamel sur les centres de courbure.* Le centre de moyenne distance des $n(n-1)$ centres de courbure correspondant aux $n(n-1)$ points de contact des tangentes parallèles est le même que le centre de moyenne distance de ces points de contact.

Démonstration, voir tome IV, page 180.

15. *Théorème sur les polaires.* Les polaires de tous

les points d'une droite ont $(n-1)^2$ points en commun.

Démonstration. Soit $U = 0$ l'équation de la courbe rendue homogène $\left(\text{en prenant pour coordonnées } \frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$; soient $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ les coordonnées du sommet d'un faisceau tangentiel; l'équation de la polaire de ce faisceau est, comme on sait,

$$a\frac{dU}{dx} + b\frac{dU}{dy} + c\frac{dU}{dz} = 0.$$

Si le sommet est sur une droite, on a

$$c = pa + qb,$$

p et q étant des constantes; donc l'équation de la polaire est

$$a\left(\frac{dU}{dx} + p\frac{dU}{dz}\right) + b\left(\frac{dU}{dy} + q\frac{dU}{dz}\right) = 0.$$

On satisfait à cette équation, en posant

$$\frac{dU}{dx} + p\frac{dU}{dz} = 0, \quad \frac{dU}{dy} + q\frac{dU}{dz} = 0:$$

ces deux lignes, chacune de degré $n-1$, se coupent en $(n-1)^2$ points; donc, etc.

16. *Théorème de M. Plücker sur les points multiples.* Si une ligne de degré n a des points multiples, ils se trouvent sur une ligne de degré $n-1$.

Démonstration, voir tome VII, page 423.

17. *Théorème.* Par un point donné, on mène n droites aux n points d'intersection d'une transversale avec la courbe; ce faisceau coupera la courbe encore en $n(n-1)$ points situés sur une ligne d'ordre $n-1$.

Démonstration. Premier cas. *Le point donné est à l'infini.* Le faisceau est formé de droites parallèles, de direction connue. Donnons cette direction à l'axe des y, et prenons la transversale pour axe des x; l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme $Py + Q = 0$, P étant une fonction de x et de y, de degré $n-1$, et Q une fonction de x seulement et de degré n. Cette équation est satisfaite, en posant

$$Q = 0, \quad P = 0;$$

or $Q = 0$ représente le faisceau des droites parallèles, et ce faisceau rencontre la courbe en un nombre de points $n(n-1)$ placés sur la courbe de degré $n-1$, représentée par $P = 0$.

Second cas. *Le point est à une distance finie.* On projette ce point à une distance infinie, et le premier cas se reproduit.

18. *Théorème.* Une courbe de degré n ne peut avoir plus de $n(n-1)^2$ points *doubles*.

Démonstration. Soit $\varphi = 0$ l'équation en x, y de la courbe; m étant le coefficient angulaire d'une tangente, on a

$$m = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}.$$

Au point double on doit avoir deux valeurs pour m; ce qui n'est possible que si

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Ces deux équations sont chacune de degré $n-1$, et $\varphi = 0$ est de degré n; donc, etc.

En appliquant la méthode connue pour déterminer la valeur de l'expression $\frac{0}{0}$, on trouve que les deux valeurs de m sont données par l'équation suivante :

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}m^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}m + \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0.$$

Il y a trois cas à distinguer : 1° les deux racines sont réelles et inégales ; deux branches réelles passent par le *point double*, et chaque branche a une tangente distincte ; 2° les deux racines sont égales ; deux branches réelles passent par le point, et les deux tangentes se confondent en une seule : c'est un point double de rebroussement ; 3° les deux racines sont imaginaires ; le point double est isolé.

19. *Théorème.* Le nombre de points de rebroussement ne surpasse pas $2n(n-2)$, et ces points se trouvent sur une ligne de degré $2(n-2)$.

Démonstration. Pour que l'équation du second degré en m, rapportée ci-dessus, ait deux racines égales, on doit voir

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 ;$$

équation de degré $2(n-2)$. Donc, etc.

20. *Théorème.* Lorsqu'une courbe de degré n a un point double, non de rebroussement, le nombre de tangentes qu'on peut mener par un point donné à cette courbe se réduit à $n(n-1)-2$.

Démonstration. Supposons d'abord un faisceau de tangentes parallèles, et soit m le coefficient angulaire ; on a

$$(1) \qquad m\frac{d\mathrm{U}}{dy} + \frac{d\mathrm{U}}{dx} = 0.$$

Cette équation, de la polaire d'un point situé à l'infini sur une droite de direction m, représente la courbe dont les $n(n-1)$ points d'intersection avec la courbe donnée sont tels, qu'en menant par chacun de ces points une parallèle ayant la direction donnée, cette parallèle a un *point double* en commun avec la courbe; donc le point double déterminé par les équations

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0,$$

doit se trouver sur la courbe (1), et c'est ce qui est évident. Mais la droite qui passe par ce point double, quoique ayant deux points en commun avec la courbe, n'est pas une *tangente*; il faut donc retrancher ce double point du nombre des $n(n-1)$ points qui donnent de véritables tangentes: ainsi le nombre de ces tangentes ne peut dépasser $n(n-1)-2$. Si le sommet du faisceau tangentiel est à une distance finie, on le ramène, par la projection perspective, au cas précédent.

Observation. Toute courbe peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une droite mobile dont elle est l'enveloppe. Il n'y a de tangentes que les droites sur lesquelles vient s'appliquer la droite mobile.

21. *Théorème.* Si la courbe de degré n a un point double de rebroussement, le faisceau tangentiel a $n(n-1)-3$ tangentes.

Démonstration. Dans ce cas, la polaire d'un point situé à l'infini passe par le point double, et touche la courbe donnée en ce point; par conséquent, *trois* des $n(n-1)$ points d'intersection se réunissent au point de contact, et, comme ces points ne donnent pas de tangentes, il s'ensuit que le nombre de tangentes se réduit à $n(n-1)-3$.

22. *Théorème.* Dans une ligne de degré n, les points d'inflexion sont sur une ligne d'ordre $3n-4$.

Démonstration. Au point d'inflexion, le coefficient angulaire $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ atteint une valeur extrême, maximum ou minimum; en d'autres termes, la tangente *rebrousse*.

D'après la propriété connue, appartenant aux valeurs extrêmes, le coefficient différentiel du second ordre $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ doit être nul aux points d'inflexion; comme ce coefficient différentiel forme le dénominateur du rayon de courbure, on en conclut que le rayon de courbure est infini, ou bien que le cercle de courbure se réduit à une droite, qui est la tangente elle-même : de sorte que cette droite à trois points en commun avec la courbe, est une tangente *osculatrice*. Ne nous occupant que de généralités, il est bien entendu que nous faisons abstraction des diverses circonstances qui modifient la théorie des valeurs extrêmes. Cela posé, soit $\mathrm{F} = 0$ l'équation de degré n d'une courbe plane. La dérivée première est

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dy} y' = 0, \quad \text{où} \quad y' = \frac{dy}{dx};$$

la dérivée seconde, après qu'on y a fait $y'' = 0$, devient

$$2\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy} y' + \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2} + y'^2 \frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2} = 0;$$

éliminant y', on obtient

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d^2\mathrm{F}}{dy^2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)^2 - 2\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy} + \frac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) = 0.$$

Telle est l'équation aux différences partielles à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'un point d'inflexion, et cette équation est de degré $3n - 4$; donc, etc.

Corollaire. Le nombre de points d'inflexion ne peut dépasser $3n^2 - 4n$.

23. Lemme. F *étant une fonction entière en* x, y *de degré* n, *et* p *une fonction linéaire des mêmes variables; si l'expression* (A) *aux différences partielles est divisible par* F, *en remplaçant* F *par* pF, *de degré* $n + 1$, *le résultat sera divisible par* pF.

Démonstration. Faisons $pF = f$; on a

$$\frac{df}{dx} = F\frac{dp}{dx} + p\frac{dF}{dx},$$

$$\frac{df}{dy} = F\frac{dp}{dy} + p\frac{dF}{dy},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2\frac{dF}{dx}\frac{dp}{dx} + p\frac{d^2F}{dx^2},$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 2\frac{dF}{dy}\frac{dp}{dy} + p\frac{d^2F}{dy^2},$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} = \frac{dF}{dy}\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dy}\frac{dF}{dx} + p\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - 2\frac{df}{dy}\frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2,$$

on obtient un résultat de la forme

$$p^3A + p^2FM + pFN.$$

La quantité indépendante de p s'anéantit; M et N sont des fonctions entières. Or A est divisible par F; donc l'expression est divisible par pF.

24. Lemme. F *étant le produit de n facteurs linéaires en x, y, l'expression* (A), *de degré* $3n-4$, *est toujours divisible par* F.

Démonstration. Soit $F = pq$, p et q étant deux fonctions *linéaires*; l'expression (A) devient

$$pq\left(\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\right)^2:$$

donc (A) est divisible par pq. La proposition étant vraie pour deux facteurs, elle sera également vraie, d'après le lemme précédent, pour trois facteurs, etc.

25. *Théorème*. Dans les $n(3n-4)$ points d'inflexion, il y en a toujours $2n$ situés à l'infini, et les $3n(n-2)$

points d'inflexion restants sont sur une ligne de degré $3(n-2)$.

Démonstration. Soit $F=0$ l'équation de la courbe de degré n, et $U_n=0$ l'équation des n asymptotes; comme on sait, F a la forme $F=U_n+U_{n-2}=0$, où U_{n-2} est une fonction de degré $n-2$. U_n est un produit de n facteurs linéaires; donc, dans le calcul de l'équation (A) de degré $3n-4$, l'ensemble des termes qui proviennent de U_n seulement peut, d'après le lemme précédent, se mettre sous la forme $U_n V_{2n-4}$, et il est facile de s'assurer que les autres termes ne dépassent pas le degré $3n-6$; donc l'équation (A) prend cette forme

$$U_n V_{2n-4} + V_{3n-6} = 0.$$

Faisant $U_n=0$, le degré de cette équation s'abaisse de deux unités; donc la courbe des points d'inflexion a n asymptotes en commun avec la courbe donnée. Parmi les intersections de la courbe des points d'inflexion avec la courbe donnée, il y a donc $2n$ points situés à l'infini; éliminant U_n, on obtient

$$U_{n-2} V_{2n-4} = V_{3n-6}:$$

équation de degré $3(n-2)$ qui représente une courbe de ce degré, et dont les intersections avec la courbe donnée indiquent les points d'inflexion, réels ou imaginaires.

Les courbes du troisième degré ont quinze points d'inflexion, dont six sont à l'infini, et parmi les neuf restants, nous verrons qu'il y en a au moins six d'imaginaires et trois réels et en ligne droite.

26. *Théorème.* La polaire réciproque d'une courbe de degré n, a $3n(n-2)$ points de rebroussement.

Démonstration. La courbe a $3n(n-2)$ points d'inflexion et autant de tangentes de rebroussement; par conséquent, la polaire réciproque a autant de points de rebroussement.

27. *Théorème.* **Une courbe de degré n a**

$$\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$$

tangentes doubles.

Démonstration. Soit P une courbe de degré n, et P_1 sa polaire réciproque de degré $n_1 = n(n-1)$; le faisceau tangentiel à P_1 doit généralement renfermer $n_1(n_1-1)$ tangentes (9). Mais P_1 étant la polaire réciproque de P, il s'ensuit que le faisceau tangentiel de P_1 ne renferme réellement que n tangentes; le nombre de tangentes perdues se monte donc à $n_1(n_1-1) - n = n^3(n-2)$. La polaire P_1 a $3n(n-2)$ points de rebroussement (26); pour chacun de ces points, le faisceau perd trois tangentes (21) (*); le nombre de tangentes perdues est donc $9n(n-2)$. Or $n^3(n-2) - 9n(n-2) = n(n-2)(n^2-9)$. Ces tangentes disparues proviennent des points doubles dont chacun fait disparaître deux tangentes (19); il y a donc dans la courbe P_1 un nombre de points doubles exprimé par

$$\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9);$$

il y a donc autant de tangentes *doubles* dans la courbe P, c'est-à-dire de tangentes touchant la courbe en deux points distincts.

Observation. Cette démonstration *indirecte* n'est pas entièrement satisfaisante. Elle est de M. Plücker, ainsi que tous les théorèmes précédents à partir du § 18; on les trouve dans l'ouvrage du célèbre professeur, publié à Berlin en 1835 sous ce titre : *System der Analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweise gegründet, und insbesondere eine ausfuhrliche Theorie der curven dritter Ordnung enthaltend :* Système de géométrie ana-

(*) Cette observation a deja ete faite par M. Poncelet.

lytique, fondée sur de nouvelles considérations, et comprenant en particulier une théorie complète des courbes du troisième ordre; par M. le docteur Julius Plücker, professeur à l'Université de Halle, in-4° de 266 pages. Nous donnerons cette théorie incessamment. (*Suite.*)