

MOURGUES

Note sur le théorème de M. Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 278-279

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__278_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LE THÉORÈME DE M. STURM;

PAR M. MOURGUES,

Professeur à Marseille.

Un lemme de ce théorème a pour énoncé :

Si a est une racine de $f(x) = 0$, $f(x)$ et $f'(x)$ offrent une variation pour $x = a - h$ et une permanence pour $x = a + h$.

En modifiant légèrement la démonstration ordinaire,

on la rend applicable au cas où a est une racine multiple.

Effectivement

$$f(a - 2h) - f(a - h) = -hf'(a - h) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a - h) \dots,$$

$$f(a + 2h) - f(a + h) = hf'(a + h) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a + h) \dots$$

Or, $f(a)$ étant nul, on peut donner à $2h$ une valeur assez petite pour que $f(x)$ varie en grandeur dans un même sens de $x = a - 2h$ à $x = a$, comme de $x = a$ à $x = a + 2h$.

Les signes des premiers membres sont donc ceux de $f(a - 2h)$ et $f(a + 2h)$, et, par suite, ceux de $f(a - h)$ et $f(a + h)$. D'ailleurs les signes des seconds membres sont ceux de $-f'(a - h)$ et $f'(a + h)$; donc $f(a - h)$ et $f'(a - h)$ sont de signes contraires, et $f(a + h)$ et $f'(a + h)$ sont de même signe, que a soit une racine simple ou multiple.

Corollaire. Il en sera de même pour $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ et $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)$ désignant un polynôme qui ne s'évanouit, ni pour $x = a - h$, ni pour $x = a + h$, puisqu'on ne fera ainsi que multiplier en même temps $f(x)$ et $f'(x)$ par un nombre positif ou négatif.