Nouvelles annales de mathématiques

J. Lefèvre

Question 1 de M. Strebor

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 276-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__276_1>

QUESTION 1 DE M. STREBOR

(voir t IX, p 181).

PAR M. J. LEFÈVRE (DE SOISSONS),
Élève de M. Watelet.

PROBLÈME. *Soient* X, Y, *deux points pris sur les prolongements des axes d'une ellipse dont le centre est* O, *tels que, si* P *et* Q *sont respectivement les points de contact des tangentes menées par* X *et* Y, *les angles* OXP, OYQ *soient égaux. Trouver la courbe, lieu du point dont* OX, OY *sont les coordonnées.*

Solution. Prenons pour axes des coordonnées les axes de l'ellipse; faisons OX $= x$, OY $= y$, et appelons x', y', x'', y'', les coordonnées des points de contact P et Q. Puisque les points P et Q sont sur l'ellipse, nous aurons les deux équations

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2. \tag{2}$$

Mais la longueur OX est l'abscisse du point où la tangente PX rencontre l'axe des x, de même OY est l'ordonnée du point où la tangente QY coupe l'axe des y; donc

$$x = \frac{a^2}{x'}, \tag{3}$$

$$y = \frac{b^2}{y''}. \tag{4}$$

D'ailleurs, puisque les angles OXP, OYQ doivent être égaux, on a

$$(5) \qquad \frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \frac{a^2 y''}{b^2 x''}.$$

Éliminant x', y', x'', y'' entre les cinq équations, on trouve

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = a^4 - b^4.$$

Ainsi le lieu cherché est une hyperbole, qui se réduit à deux droites, lorsque l'ellipse devient un cercle. Lorsque P est à l'extrémité d'un axe, Q est à l'extrémité de l'autre axe, et OX, OY sont infinis. On peut donc prévoir à priori que le lieu cherché est une courbe infinie.

P et Q se confondent à l'extrémité du diamètre de l'ellipse donnée par l'équation

$$y = \frac{b^2}{a^2} x,$$

et dans l'hyperbole de ci-dessus, on a alors

$$x^2 = y^2 = a^2 + b^2.$$

Observation. Si l'on remplace $+b^2$ par $-b^2$, la conique donnée devient une hyperbole et le lieu cherché une ellipse donnée par l'équation

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^4 - b^4;$$

ellipse réelle si $a > b$, et imaginaire si $a < b$; pour $a = b$, l'ellipse se réduit à un point.

Observation. M. l'abbé Manganotti (séminaire de Vals) résout le même problème et ajoute que, si l'on donne une parabole, et qu'au lieu des axes OX, OY, on considère l'axe de la parabole et la tangente menée au sommet, on trouve, pour l'équation du lieu,

$$y^2 x = -\left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

hyperbole cubique.