GEORGE SALMON

Sur le faisceau de normales à une ligne plane et à une surface algébrique. D'après le rév. George Salmon

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 274-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__274_0>

SUR LE FAISCEAU DE NORMALES A UNE LIGNE PLANE ET A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

D'APRÈS LE RÉV. GEORGE SALMON.

(*The Cambridge and Dublin mathematical Journal;* février 1848, p. 46.)

1. THÉORÈME. *Par un point donné, on peut mener au plus* n^2 *normales à une courbe algébrique de degré* n *et au plus* $n^3 - n^2 + n$ *normales à une surface algébrique de degré* n.

Démonstration. Lignes. Supposons que le point soit situé à l'infini; pour une direction donnée, le faisceau sera formé de $n^2 - n$ normales, autant qu'il y a de tangentes parallèles : de plus, la courbe a, généralement parlant, n asymptotes, dont les normales correspondantes sont situées à l'infini, et par conséquent aussi leurs points d'intersection; le nombre des normales partant d'un point placé à l'infini est donc $n^2 - n + n = n^2$. Mais ce nombre doit rester le même, quel que soit le centre du faisceau; donc, etc.

Surfaces. Soit encore le point situé à l'infini. Le faisceau aura d'abord $n(n-1)^2$ normales, autant qu'il y a de plans tangents parallèles; ensuite tous les points à l'infini peuvent être considérés comme formés par l'intersection d'un plan à l'infini avec la surface; les normales à cette section sont aussi normales à la surface; le nombre des normales à cette surface plane, menée par un point, est n^2; donc le nombre total des normales est

$$n(n-1)^2 + n^2 = n^3 - n^2 + n.$$

Observation. Ces nombres sont des limites. Lorsque la courbe a des points multiples, des points d'inflexion, ou bien lorsque la courbe est parabolique, le nombre des tangentes parallèles à une direction donnée est diminué, de même que le nombre des normales parallèles. Il en est de même lorsque le centre du faisceau est un point singulier de la courbe.

Observation. On trouve une démonstration analytique de ce même théorème dans le Journal de M. Liouville (tome IV, page 175, 1839); la démonstration actuelle est une bonne vérification. L'eût-on adoptée avec confiance de prime abord? Le passage de l'infini au fini présente beaucoup moins de certitude que le passage dans la direction opposée.

2. Soient $F(x, y) = 0$, l'équation de la courbe de degré n; P et Q les dérivées du premier membre par rapport à x et par rapport à y; P_1, Q_1 les valeurs de P et de Q pour un point (x_1, y_1) de la courbe. Prenant l'origine pour centre d'un faisceau normal, l'équation de cette normale est

$$yP_1 - xQ_1 = 0;$$

P_1, Q_1 se rapportent au point où la normale coupe la courbe, et on a les deux équations simultanées

$$(a) \qquad F(x_1, y_1) = 0, \quad y_1P_1 - x_1Q_1 = 0,$$

qui ont n^2 solutions communes. On a donc n^2 systèmes d'équation

$$yP_r - xQ_r = 0,$$

r ayant toutes les valeurs de 1 à n^2. Le produit de ces équations présente le système du faisceau normal; dans ce cas, les fonctions P_r, Q_r disparaissent, car ce sont des fonctions symétriques des valeurs communes au système d'équations (a); ce produit est donc une fonction entière de degré n^2. Soit L ce produit; $L = 0$ représente une ligne de l'ordre n^2 qui coupe la courbe en n^3 points. Or n^2 de ces points où les normales rencontrent rectangulairement, sont sur une ligne d'ordre n; il s'ensuit que les $n^3 - n^2$ autres points où les normales coupent obliquement sont sur une ligne d'ordre $n^2 - n$.