

CHOQUET

**Sur les points singuliers des courbes
algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 260-264

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9_260_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES POINTS SINGULIERS DES COURBES ALGÈBRIQUES ;

PAR M. CHOQUET.

1. Considérons une courbe algébrique quelconque ; supposons l'origine des coordonnées placée en un de ses points, et faisons $\frac{y}{x} = t$: l'équation de la courbe pourra être mise sous cette forme

$$(1) \quad A + Bt + x(C + Dt + Et^2) + \dots = 0.$$

Je représenterai, pour abrégé, le premier membre de cette équation par $F(x, t)$; et je désignerai par a le coefficient angulaire de la tangente au point pris pour origine, de sorte que l'on aura

$$A + Ba = 0.$$

2. Supposons d'abord que le coefficient B ne soit pas nul. Si l'on fait $t = a$ dans $F(x, t)$, la partie indépendante de x sera annulée. Il pourra se faire que les multiplicateurs de plusieurs puissances consécutives de x soient aussi rendus nuls, mais ils ne seront pas tous zéro ; car, si cela était, le polynôme $x F(x, t)$ admettrait le facteur linéaire $y - ax$. Soit x^n la plus faible puissance de x dont le coefficient n'est pas nul quand on fait $t = a$; et soit H la valeur que prend alors ce coefficient. Pour $t = a$, en prenant x suffisamment petit, le polynôme $F(x, t)$ aura le signe de Hx^n . Si l'on fait $t = a + \sigma$, σ étant une

quantité qu'on pourra prendre aussi petite qu'on le voudra, la quantité $A + Bt$ deviendra $B\alpha$, et le signe de $F(x, t)$, quand on prendra x suffisamment petit, sera celui de $B\alpha$. Or on peut disposer du signe de α de manière que le signe de $B\alpha$ soit contraire à celui de Hx^n , quel que soit d'ailleurs le signe de x ; et quand le polynôme $F(x, t)$ a des signes contraires pour $t = a$ et pour $t = a + \alpha$, l'équation $F(x, t) = 0$, ou l'équation (1) est vérifiée par une valeur réelle de t comprise entre a et $a + \alpha$. Il suit de là que, dans le cas que nous examinons, la courbe a des points dans le voisinage de l'origine, du côté des x positifs et du côté des x négatifs.

3. Si l'exposant n est impair, on fera prendre des signes contraires aux deux termes Hx^n et $B\alpha$ en prenant pour α des signes différents, suivant que x sera positif ou négatif; ce qui prouve que la courbe existera à droite et à gauche de l'origine, du même côté de sa tangente.

Si, au contraire, l'exposant n est pair, la quantité α devra garder un signe invariable pour que le signe de $B\alpha$ soit contraire à celui de Hx^n , quand on supposera successivement x positif et x négatif. Dans ce cas, la courbe passe à l'origine d'un côté à l'autre de sa tangente, et elle a par conséquent un point d'inflexion.

4. La courbe n'a pas plusieurs branches qui passent à l'origine; car la dérivée par rapport à t de l'équation (1) est

$$(2) \quad B + x(D + 2Et) + \dots$$

Elle est différente de zéro pour toutes les valeurs suffisamment petites de x ; par conséquent, pour de telles valeurs, l'équation (1) ne peut pas être vérifiée par deux valeurs réelles de t (*).

(*) Cette démonstration ne prouve pas que la courbe n'a aucune branche tangente à l'axe des x ; car, pour que le polynôme (2) conserve

5. L'exposant n indique l'ordre du contact de la courbe avec sa tangente; car, pour $t = a$ ou $y = ax$, l'équation $x F(x, t)$ a $n + 1$ racines nulles; d'où il suit que la droite $y = ax$ rencontre la courbe en $n + 1$ points réunis en un seul.

6. Les mêmes conclusions subsistent en supposant $B = 0$, si A n'est pas nul, puisqu'on peut changer dans les raisonnements x en y et y en x .

7. Examinons maintenant le cas où l'on a à la fois $A = 0$, $B = 0$. Le coefficient angulaire de la tangente dépend alors d'une équation d'un degré supérieur au premier. Soit $\varphi(t) = 0$ cette équation; de sorte que l'équation (1) sera

$$(3) \quad x^p \varphi(t) + x^{p+1} \psi(t) + \dots = 0.$$

Soit a une des racines réelles de l'équation $\varphi(t) = 0$ (*), et faisons encore dans le polynôme $F(x, t)$, $t = a$ et $t = a + \alpha$. Soit Hx^q le terme de plus faible puissance de x dans le résultat qu'on obtient pour $t = a$; soit k la valeur de la première dérivée de $\varphi(t)$ qui n'est pas rendue nulle par $t = a$. Si r est l'ordre de cette dérivée, lorsqu'on fera $t = a + \alpha$, le polynôme $\varphi(t)$ aura, pour de très-petites valeurs de α , le signe de $k\alpha^r$, et le polynôme $F(x, t)$, en donnant à x des valeurs suffisamment petites, aura le signe de $k\alpha^r x^p$.

le même signe, x étant très-petit, il faut que t ne croisse pas de manière à devenir infini pour $x = 0$. Mais l'équation de la courbe peut être mise sous cette autre forme,

$$B + A \frac{x}{y} + y \left(E + D \frac{x}{y} + C \frac{x^2}{y^2} \right) + \dots = 0.$$

S'il existe des branches tangentes à l'axe des y , il faudra que, pour des valeurs suffisamment petites de y , on ait des valeurs très-petites de $\frac{x}{y}$; or, B n'étant pas nul, l'équation ci-dessus ne peut être vérifiée par de telles valeurs.

(*) Si $\varphi(t) = 0$ n'a pas de racines réelles, le point est *isolé*.

Les deux termes Hx^q et $k\alpha' x^p$ auront le même signe ou des signes contraires en même temps que ceux-ci Hx^{q-p} et $k\alpha'$. Or, si l'exposant r est impair, il en sera des signes de ces deux termes, lorsqu'on supposera successivement x et α positifs et négatifs, comme dans le cas que nous avons considéré plus haut. Donc la courbe aura encore une branche tangente à la droite $y = ax$, qui s'étendra de part et d'autre de l'origine, et qui sera située d'un seul côté de la tangente, ou qui passera d'un côté à l'autre de cette droite, suivant que l'exposant $q - p$ sera un nombre impair ou un nombre pair.

Si la courbe a plusieurs branches tangentes à l'origine à la droite $y = ax$, il y en a un nombre impair d'un côté et de l'autre de l'axe des y et d'un même côté de la tangente, lorsque l'exposant $q - p$ est impair; et il n'y en a aucune, ou il y en a un nombre pair de part et d'autre de l'axe des y , et de l'autre côté de la tangente. Lorsque l'exposant $q - p$ est pair, les branches de la courbe sont en nombre impair dans l'un des angles de la tangente avec l'axe des y et dans son opposé; et il n'y en a aucune ou il y en a un nombre pair dans chacun des deux autres angles opposés.

Quand l'exposant r est pair et l'exposant $q - p$ impair, les deux termes Hx^{q-p} et $k\alpha'$ ont des signes contraires pour un signe invariable de x , et des valeurs positives ou négatives de α ; ce qui prouve que la courbe a deux branches tangentes à la même droite $y = ax$, d'un côté et de l'autre de cette droite, et situées toutes deux du côté des x positives, ou du côté des x négatives; de sorte qu'elles forment un rebroussement de première espèce. Si la courbe a un plus grand nombre de branches tangentes à la droite $y = ax$, il y en a un nombre impair au-dessus et au-dessous de la tangente d'un côté de l'axe des y , et il n'y en a aucune ou il y en a un nombre pair au-dessus et

au-dessous de la tangente, de l'autre côté de l'axe des y .

Quand les deux exposants r et $q - p$ sont pairs, les signes des termes Hx^{q-p} et $k\alpha^r$ sont invariables. Dans ce cas, si les coefficients H et k ont le même signe, l'origine peut être un point isolé; et s'il y a des branches de la courbe qui passent par ce point, elles ne peuvent être qu'en nombre pair dans chacun des quatre angles formés par la tangente et l'axe des y . Si les coefficients H et k ont des signes contraires, il y a dans chacun de ces quatre angles un nombre impair de branches de la courbe.

Dans tous les cas, le nombre total des branches de la courbe dans les quatre angles formés par la tangente et l'axe des y est pair. Celles qui sont en même nombre dans deux angles opposés, ou dans deux angles adjacents d'un même côté de la tangente, sont les continuations les unes des autres et ne peuvent offrir que des points d'inflexion. Celles qui ne se continuent pas les unes les autres sont en nombre pair et forment des rebroussements. Il ne peut y avoir ni points d'arrêt, ni points anguleux.

8. Le nombre des branches tangentes à la droite $y = ax$, d'un même côté de l'axe des y , ne peut excéder le degré de multiplicité r de la racine a de l'équation $\varphi(t) = 0$; car la dérivée de l'ordre r de $\varphi(t)$ ayant, pour $t = a$, une valeur k différente de zéro, la dérivée du même ordre, par rapport à t de l'équation (3), quand on y fait $t = a$ et $t = a \pm \alpha$, garde constamment le même signe, et ne peut devenir nulle, pour des valeurs suffisamment petites de x et de α . Donc, suivant le théorème de Rolle, l'équation (3) ne peut être vérifiée par plus de r valeurs réelles de t comprises entre a et $a \pm \alpha$, en prenant la valeur de α suffisamment petite.