NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Seconde solution du même problème

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 252-255

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__252_1>

SECONDE SOLUTION DU MÊME PROBLÈME.

1. Une considération ingénieuse a ramené la recherche du précédent lieu géométrique à une question de tétragonométrie; mais on peut aussi trouver le lieu directement de la manière suivante :

La bissectrice de l'angle AOB est évidemment le *lieu des centres*. Prenons cette bissectrice pour axe des x, et la droite AB, polaire du point O, pour axe des y; le milieu I de AB est donc l'origine des coordonnées.

Soient $OI = l$; $AI = BI = y'$; l et y' sont des quantités connues. L'équation de la conique a évidemment la forme suivante :

$$y^2 + Cx^2 + Ex - y'^2 = 0.$$

On a

$$2yy' + Ex - 2y'^2 = 0, \quad \text{polaire du point O},$$

d'où

$$E = \frac{2y'^2}{l}.$$

On a

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC) = \frac{4y'^2}{l^2}(y'^2 + Cl^2),$$

$$m = B^2 - 4AC = -4C,$$

$$X = \frac{k}{m} = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = -\frac{E}{2C} = -\frac{y'^2}{Cl} = \text{abscis du centre.}$$

Si la courbe est rapportée au centre, α, β étant les coordonnées du foyer, on a

$$\left.\begin{aligned} \beta^2\cos\gamma + \alpha\beta &= \frac{4CL}{m^2}\cos\gamma \\ \alpha^2\cos\gamma + \alpha\beta &= \frac{4L}{m^2}\cos\gamma \end{aligned}\right\} \text{(\textit{voir} tome II, page 429)};$$

mais l'origine n'étant pas au centre, mais en I, il faut remplacer α par $\alpha + X$ ou par $\alpha - \frac{y'^2}{Cl}$, et l'on obtient

$$\beta^2\cos\gamma + \alpha\beta - \frac{\beta y'^2}{Cl} = \frac{4CL}{m^2}\cos\gamma = \frac{y'^2(y'^2 + Cl^2)}{Cl^2}\cos\gamma,$$

$$\left(\alpha - \frac{y'^2}{Cl}\right)^2\cos\gamma + \alpha\beta - \frac{\beta y'^2}{Cl} = \frac{4L}{m^2}\cos\gamma = \frac{y'^2(y'^2 + Cl^2)}{C^2l^2}\cos\gamma.$$

La première équation donne

$$C = \frac{y'^2(y'^2\cos\gamma + l\beta)}{l^2[\cos\gamma(\beta^2 - y'^2) + \alpha\beta]};$$

la deuxième donne

$$C = \frac{y'^2(\beta + 2\alpha\cos\gamma + l\cos\gamma)}{l\alpha(\beta + \alpha\cos\gamma)}.$$

Égalant les deux valeurs de C, on obtient

$$\begin{aligned}&\alpha(\beta l + y'^2\cos\gamma)(\beta + \alpha\cos\gamma)\\ &= l(\beta + 2\alpha\cos\gamma + l\cos\gamma)(\beta^2\cos\gamma + \alpha\beta - y'^2\cos\gamma),\end{aligned}$$

équation du troisième degré.

2. Faisant $\alpha = 0$, on trouve

$$\beta = \pm y' \quad \text{et} \quad \beta = -l\cos\gamma.$$

Faisant $\beta = 0$, on a

$$\alpha = -l.$$

Ainsi la courbe passe par les points O, A, B; ce qu'on pouvait prévoir. Car le système des droites OA, OB représente une conique satisfaisant à la question, et dont le centre et les deux foyers sont réunis en O; de même la droite AB représente une ellipse dont le centre est en I, et dont les deux foyers sont en A et B.

3. Faisant

$$y'^2\cos\gamma + l\beta = 0, \quad \beta + 2\alpha\cos\gamma + l\cos\gamma = 0,$$

on obtient

$$\beta = \frac{-y'^2\cos\gamma}{l}; \qquad \alpha = \frac{y'^2 - l^2}{l};$$

c'est le foyer de la parabole. Ce point partage la courbe en deux parties; l'une renferme les foyers des hyperboles, et l'autre les foyers des ellipses dont aucune ne peut devenir un cercle, à moins que γ ne soit un angle droit.

4. Développant l'équation, on obtient, après avoir divisé par $\cos\gamma$,

$$\begin{aligned}&l\beta(\beta^2 + 2\alpha\beta\cos\gamma + \alpha^2) + \alpha\beta(l^2 - y'^2) + \cos\gamma(l^2\beta^2 - \alpha^2 y'^2)\\ &\quad - ly'^2(\beta - 2\alpha\cos\gamma) - l^2y'^2\cos\gamma = 0.\end{aligned}$$

Les deux facteurs de $\beta^2 + 2\alpha\beta\cos\gamma + \alpha^2$ étant imaginaires, la courbe ne peut avoir qu'une asymptote parallèle à l'axe des α. L'équation de cette asymptote est

$$\beta = \frac{y'^2 \cos\gamma}{l} \text{ (\textit{voir} Vannson, tome II, page 391).}$$

Si l'on fait $\cos\gamma = 0$, l'équation se décompose en $\beta = 0$, et

$$l(\beta^2 + \alpha^2) + \alpha(l^2 - y'^2) - ly'^2 = 0,$$

équation d'un cercle; le cercle correspondant aux foyers des hyperboles et la droite à ceux des ellipses.