PIOBERT

# Complément de l'article sur la meilleure forme à donner aux triangles dans les levers

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 9 (1850), p. 234-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__234_1>

# COMPLÉMENT DE L'ARTICLE SUR LA MEILLEURE FORME A DONNER AUX TRIANGLES DANS LES LEVERS

(voir t. IX, p. 197);

PAR M. PIOBERT.

On a vu, page 200, que le rapport du déplacement du sommet à la hauteur du triangle, ou ce qu'on appelle la déformation du triangle, est

$$\frac{\mathrm{D}}{c\sin\mathrm{A}}=\frac{1}{\sin\mathrm{B}}\sqrt{\frac{\sin^2 d\mathrm{A}}{\sin^2\mathrm{A}}+\frac{\sin^2 d\mathrm{C}}{\sin^2\mathrm{C}}+\frac{2\sin d\mathrm{A}\sin d\mathrm{C}\cos\mathrm{B}}{\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{C}}}.$$

Il est facile de voir que les plus grandes déformations, soit dans le sens de la hauteur, soit latéralement, auront lieu lorsque $d\mathrm{A}$ et $d\mathrm{C}$ seront égaux à la plus grande erreur à craindre dans la mesure de chaque angle, $d\mathrm{A}$ et $d\mathrm{C}$ étant de même signe dans le premier cas et de signes différents dans le dernier. On aura donc

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{\sin dA \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 C \pm 2 \sin A \sin C \cos B}}{\sin A \sin B \sin C},$$

le signe + pour des erreurs de même signe et le signe — pour des erreurs de signes différents.

Il est également facile de s'assurer que les écarts en hauteur, qui sont les plus considérables et les plus à craindre, seront les plus petits pour $A = C$; il vient alors

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{\sin dA}{\sin A \sin B} \sqrt{2 \pm 2 \cos B}.$$

Comme $\varepsilon$ est la plus grande erreur possible sur la mesure de chaque angle, le plus grand écartement latéral du sommet B de sa véritable position sera donné par

$$dA = -dC = \varepsilon;$$

et la déformation sera

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin A \sin B} \sqrt{2 - 2 \cos B}.$$

Si deux angles seulement ont été mesurés, on aura également

$$dA = dC = \varepsilon$$

pour le cas du plus grand écart en hauteur, et la déformation sera

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin A \sin B} \sqrt{2 + 2 \cos B}.$$

La moyenne des plus grandes déformations sera

$$\frac{\sin \varepsilon}{2 \sin A \sin B} \left(\sqrt{2 - 2 \cos B} + \sqrt{2 + 2 \cos B}\right),$$

dont il faudra chercher le minimum pour avoir la condition du triangle le plus favorable, ou qui donne les chances des moins grandes erreurs sur la position du sommet à déterminer. Comme $\cos B$ est toujours dans la pratique sensiblement plus petit que l'unité, la somme des deux radicaux ne varie pas beaucoup dans les limites des valeurs qu'on donne à B, de sorte qu'on peut avoir une première approximation en ne considérant que les variations du dénominateur; on a ainsi cherché précédemment (page 200) le minimum de $\frac{1}{\sin A \sin B}$, et l'on a trouvé pour condition

$$\operatorname{tang}^2 A = 2,$$

c'est-à-dire, A et C d'environ 55°, et B de 70°.

En faisant la recherche du minimum de la valeur entière de la déformation, on trouve la condition

$$\operatorname{tang}^3 A - \operatorname{tang} A = 2,$$

d'où

$$A = C = 56^\circ 41' \quad \text{et} \quad B = 66^\circ 38',$$

au lieu des valeurs précédentes.

Lorsque les trois angles du triangle sont mesurés, $dA$ et $dC$ de même signe ne peuvent être égaux à $\varepsilon$; car autrement $dB$ serait égal à $2\varepsilon$, comme cela a déjà été dit (page 198); on ne peut alors avoir de plus grande valeur de $dA$ et de $dC$ que $\frac{\varepsilon}{2}$, et la plus grande déformation en hauteur devient

$$\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin A \sin B} \sqrt{2 + 2\cos B}.$$

La moyenne des plus grandes déformations est alors, en remarquant que $\varepsilon$ est toujours très-petit,

$$\frac{\sin \varepsilon}{2 \sin A \sin B} \left(\sqrt{2 - 2\cos B} + \tfrac{1}{2} \sqrt{2 + 2\cos B}\right);$$

en cherchant la condition du minimum, on trouve alors

$$\operatorname{tang}^3 A - \operatorname{tang} A = 4.$$

d'où

$$A = C = 60^\circ 54' \qquad \text{et} \qquad B = 58^\circ 12'.$$

Il est à remarquer que dans les diverses solutions qui précèdent, les écarts latéraux et en hauteur sont inégaux; dans le cas de deux angles mesurés, c'est l'écart en hauteur qui est le plus grand, et dans le cas des trois angles mesurés, c'est l'écart latéral. Comme, en général, il est indifférent que la déformation soit dans un sens ou dans un autre, la solution la plus avantageuse est celle où la plus grande de ces déformations est la moindre possible. Elles doivent alors être égales dans les deux sens, et il arrive qu'elles ne sont pas sensiblement plus grandes que les moyennes trouvées dans les autres solutions. Dans le cas de deux angles mesurés, on a

$$\sqrt{2 + 2\cos B} = \sqrt{2 - 2\cos B},$$

ou

$$B = 90^\circ, \qquad C = A = 45^\circ.$$

Dans le cas des trois angles mesurés, on a

$$\sqrt{2 + 2\cos B} = 2\sqrt{2 - 2\cos B},$$

ou

$$1 + \cos B = 4(1 - \cos B),$$

d'où

$$\cos B = \frac{3}{5}, \qquad B = 53^\circ 7' 49'' \qquad \text{et} \qquad A = C = 63^\circ 26' 5'',5.$$