NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JACQUINOT

Note sur la parabole rapportée à deux tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 217-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__217_1>

NOTE SUR LA PARABOLE RAPPORTÉE A DEUX TANGENTES;

PAR M. JACQUINOT,
Élève (institution Mayer).

---

1. Soit une parabole rapportée à deux de ses tangentes prises pour axes. On a l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et les trois équations de condition

$$B^2 = 4AC, \quad D^2 = 4AF, \quad E^2 = 4CF.$$

On peut toujours supposer $A > 0$, et alors on a nécessairement $C > 0$ et $F > 0$; les signes de B, D, E sont indéterminés.

Le coefficient différentiel est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Cx + By + E}{2Ay + Bx + D}.$$

Éliminons B, D, E de l'équation donnée et de l'équation différentielle, nous aurons

$$(2) \quad Ay^2 \pm 2\sqrt{AC}xy + Cx^2 \pm 2\sqrt{AF}y \pm 2\sqrt{CF}x + F = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{C}{A}}\frac{(x\sqrt{C} \pm y\sqrt{A} \pm \sqrt{F})}{x\sqrt{C} \pm y\sqrt{A} \pm \sqrt{F}}.$$

Il faut distinguer deux cas.

1°. $BDE > 0$; alors le facteur linéaire est le même dans les deux termes de la fraction, et l'on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

En effet, dans ce cas, l'équation (2) est un carré parfait, et la parabole se réduit à une droite. Exemple : B, D, E positifs; l'équation (2) devient

$$(y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \sqrt{F})^2 = 0.$$

2°. $BDE < 0$; la parabole est une courbe, les deux facteurs linéaires ne sont plus identiques, et $\frac{dy}{dx}$ n'a plus une valeur constante.

2. *Autrement.* On a

$$AE^2 + CD^2 = 8ACF, \quad BDE = \pm 8ACF;$$

donc

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 = 8ACF \mp 8ACF.$$

Pour BDE positif, L devient nulle, et la parabole se réduit à une *droite double;* pour BDE négatif, L est égale à 16 ACF, et la parabole reste courbe.