A. Fanien

Sur le calcul de π

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 190-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__190_0>

SUR LE CALCUL DE π

(voir t. I, p 190, t II, p 188, t. III, p. 13 et 58, t. IV, p 156 t IX, p. 12)

Par M. A. FANIEN,
Professeur à Redon (Ille-et-Vilaine).

La méthode simple et facile de Lacroix donne

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - (2c)^2}},$$

c désignant le côté du polygone régulier inscrit de n côtés; c_1 le côté du polygone de $2n$ côtés, et le diamètre étant pris pour 1. On tire de là

$$c_m = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{4 - (2c)^2}}}}.$$

Le nombre des radicaux superposés est $m+1$. On démontre que

$$C_1 - c_1 < \frac{1}{8}(C - c),$$

et, par suite,

$$C_m - c_m < \frac{1}{8^m}(C - c),$$

$C_1, \ldots, C_m$ désignant les côtés des polygones circonscrits semblables. Donc $P, P_1, \ldots, P_m$; $p, p_1, \ldots, p_m$ désignant les périmètres, on a

$$P_m - p_m < \frac{n \cdot 2^m (C - c)}{8^m} = \frac{P - p}{4^m}.$$

Donc $\dfrac{1}{10^k}$ désignant l'approximation demandée pour π, on devra avoir

$$\frac{P - p}{4^m} < \frac{1}{10^k};$$

d'où

$$4^m > 10^k(P - p),$$

ou, par logarithmes,

$$m \overset{=}{>} \frac{k + \log(P - p)}{\log 4}.$$

Ainsi, n étant 6, on a

$$P = 2\sqrt{3}, \quad p = 3, \quad P - p = 2\sqrt{3} - 3 < 1, \quad \log 4 > 0,6,$$

d'où

$$m \overset{=}{>} \frac{k}{0,6} = \frac{10\,k}{6}.$$

Par exemple, pour $k = 6$, on prendra $m = 10$, et, par suite, dans l'expression c_m, on devra prendre onze radicaux pour que le périmètre p_m soit la valeur approchée de π à $\frac{1}{10^6}$.

Mais, dans l'expression

$$p_m = 2^m.n\, c_m = 2^{m-1}.n.\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{4 - (2c)^2}}}},$$

le radical devant être multiplié par $2^{m-1}.n$ pour avoir p_m, et par suite π à moins de $\frac{1}{10^k}$, ce radical doit être évalué à moins d'une fraction plus petite que $\frac{1}{2^{m-1}.n.10^k}$. Ainsi, pour $n = 6$, $k = 6$, $m = 10$, on a

$$\frac{1}{2^9.6.10^6} > \frac{1}{10^{10}}.$$

D'autre part, on sait qu'en extrayant la racine de 3 à $\frac{1}{10^{10}}$ et la racine de $2 + \sqrt{3}$, à moins de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{10}}$, on a $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, à moins de $\frac{1}{10^{10}}$, et ainsi de suite. Donc l'expression

$$p_m = 2^{m-1}.6.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{3}}}}$$

donne π en prenant onze radicaux et extrayant les racines carrées successives avec l'approximation indiquée plus haut.

Pour $k = 8$, on a $m > \frac{80}{6}$ ou $m = 14$; approximation $\frac{1}{2^{13}.6.10^8} > \frac{1}{10^{13}}$. Donc en prenant quinze radicaux et extrayant les racines à moins de $\frac{1}{10^{15}}$, on aura π à moins de $\frac{1}{10^8}$.

D'ailleurs on a la formule remarquable (*)

$$\pi = 2^{m-1}n.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Les quatre méthodes dites des périmètres, des isopérimètres, des surfaces et des surfaces équivalentes ne sont que des transformations apparentes de la méthode précédente, et, par suite, on leur accorde peut-être une trop grande importance dans les examens.