

BARBET

Note sur la somme des angles d'un polygone plan et sur l'aire du polygone sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9 (1850), p. 183-188

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__183_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur la somme des angles d'un polygone plan et sur l'aire du polygone
sphérique ;

PAR M. BARBET,
Chef d'institution.

On distingue trois espèces de polygones plans ou sphériques.

1°. *Polygones convexes*; aucun côté n'est rencontré par un côté non adjacent; aucun angle intérieur n'est plus grand que deux angles droits.

2°. *Polygones non convexes*; aucun côté n'est rencontré par un côté non adjacent. Il y a des angles intérieurs plus grands que deux angles droits.

3°. *Polygones étoilés*; un côté est rencontré par un côté ou par plusieurs côtés non adjacents.

Dans ce qui suit, il ne s'agit que de polygones non étoilés.

1. THÉORÈME. *Dans un polygone convexe, la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Démonstration. Soit un polygone de n côtés. Supposons que le théorème subsiste pour $n - 1$ côtés. Soient A, B, C trois sommets consécutifs : menons la diagonale AC; elle forme évidemment, avec les côtés restants, un polygone de $n - 1$ côtés. La somme des angles de ce polygone est égale, par hypothèse, à $2(n - 3)$ ou à $2n - 6$ angles droits; joignant à cette somme celle des trois angles du triangle A, B, C, on obtient évidemment la somme des angles du polygone donné, somme égale à

$$2n - 6 + 2 = 2n - 4 = 2(n - 2);$$

donc le théorème subsiste aussi pour un polygone de n côtés. Or il subsiste pour le triangle; donc, etc.

Même démonstration pour l'aire d'un polygone sphérique convexe.

2. *Lemme.* Dans tout polygone non convexe, il est toujours possible de mener au moins une diagonale qui ne soit rencontrée par aucun côté non prolongé du polygone.

Démonstration. Soient A, B, C trois sommets consécutifs; menons la diagonale BC. Si elle ne rencontre

aucun côté du polygone, c'est la diagonale demandée; si elle rencontre un côté ou plusieurs, concevons qu'elle se meuve parallèlement à elle-même, en se rapprochant du sommet B. Il arrivera nécessairement un moment où, passant par un ou plusieurs sommets du polygone, il n'y en aura plus entre elle et le sommet B; soit O un de ces derniers sommets. Menons la droite OB; c'est une diagonale et non un côté, puisque deux côtés BA, BC passent par B, et cette diagonale OB ne peut être rencontrée par un côté, à moins que ce côté n'entre dans le triangle et coupe un des côtés BA, BC; ce qui est impossible, puisque le polygone n'est pas étoilé; donc, etc.

Observation. Même démonstration pour les polygones sphériques non convexes; il faut concevoir que le plan du grand cercle BC se meuve parallèlement à lui même.

3. THÉORÈME. *Dans un polygone non convexe, la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Démonstration. Soit un polygone de n côtés; supposons que le théorème subsiste pour tout nombre de côtés moindre que n . Menons une diagonale qui ne soit rencontrée par aucun côté (§ 2). Supposons que cette diagonale ait p côtés du polygone à sa droite et q à sa gauche; de sorte qu'on a $p + q = n$. Cette diagonale forme, avec les p côtés, un polygone de $p + 1$ côtés, et avec les q côtés, un polygone de $q + 1$ côtés; et l'on a $p + 1 < n$, $q + 1 < n$; donc, suivant l'hypothèse, les sommes des angles intérieurs dans chacun de ces polygones sont $2(p - 1)$ droits et $2(q - 1)$ droits, et ensemble $2(p + q - 2) = 2(n - 2)$. Mais l'ensemble de ces sommes est égal à la somme des angles du polygone donné; donc le théorème subsiste pour n cotés. Le théorème est évident pour un quadrilatère non convexe; il est donc vrai pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Observation. Même démonstration pour trouver l'aire d'un polygone sphérique non convexe.

4. THÉOREME. *Dans tout polygone plan, la somme des angles en dehors est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés plus deux.*

Démonstration. Un angle intérieur plus son angle en dehors vaut quatre angles droits ; donc , etc.

5. Concevons qu'un point décrive un polygone toujours dans le même sens , à partir d'un sommet quelconque ; à chaque sommet , le point change subitement sa direction dans celle du côté voisin ; la différence des deux directions est mesurée par un angle qu'on nomme *angle extérieur* ; il est le supplément à deux angles droits , par défaut pour un angle saillant et par excès pour un angle rentrant.

6. THÉOREME. *Dans un polygone convexe, la somme des angles extérieurs est égale à quatre angles droits.*

Démonstration. Chaque angle intérieur plus l'angle extérieur correspondant vaut deux angles droits ; donc , etc.

7. THÉOREME. *Dans un polygone non convexe, la somme des angles extérieurs correspondants à des angles saillants moins la somme des angles extérieurs correspondants à des angles rentrants, est égale à quatre angles droits.*

Démonstration. Pour un angle saillant S, l'angle extérieur est $2^g - S$; pour un angle rentrant R, l'angle extérieur est $R - 2^g$; donc , etc.

8. THÉOREME. *Tout polygone équangle est convexe.*

Démonstration. Soit n le nombre de côtés ; la valeur de chaque angle intérieur est donc $2^g - \frac{4^g}{n}$; tout angle intérieur est donc moindre que deux angles droits , donc , etc.

9. THÉORÈME. *Tout polygone non convexe a au moins trois angles saillants.*

Démonstration. Soit le polygone de n côtés; si le polygone n'a que deux angles saillants, il aura $n - 2$ angles rentrants : la somme des angles intérieurs surpasserait donc $2n - 4$ angles droits, ce qui est impossible, etc.

10. THÉORÈME. *Dans tout polygone convexe, la somme des compléments des angles intérieurs obtus moins la somme des compléments des angles intérieurs aigus, est égale à autant d'angles droits qu'il y a de côtés moins quatre.*

Démonstration. Soient n le nombre de côtés; o le nombre d'angles obtus, et o' la somme de leurs compléments; a le nombre d'angles aigus, et a' la somme de leurs compléments : la somme des angles intérieurs est donc $+ o' - a' + (o + a)$ angles droits, ou n angles droits $+ o' - a'$; donc $o' - a' = n - 4$ angles droits.

Corollaire. Tout polygone convexe, le triangle excepté, a au moins un angle obtus.

11. Lemme. Soit le trilatère ABCD, formé par les droites AB, BC, CD. Élevant en B une perpendiculaire à la droite AB, et en C une perpendiculaire à la droite CD, l'angle BOC formé par les deux perpendiculaires BO, CO, est égal à quatre angles droits moins la somme des angles $ABC + BCD$.

12. THÉORÈME. *Si un point mobile décrit une courbe plane sans inflexion et toujours dans le même sens, la somme de tous les changements de direction est égale à l'angle formé par les deux normales menées au point de départ et au point d'arrivée.*

Démonstration. Soient AMB la courbe parcourue; A le point de départ et B le point d'arrivée; AP la direction de la tangente en A indiquée par le sens du mouvement de départ, et BQ la direction de la tangente en B, indiquée

par le sens du mouvement d'arrivée. Si le point parvenu en B parcourait la corde BA pour revenir en A, la somme totale de ces changements de direction serait égale à quatre angles droits (§ 6); mais, depuis qu'il est parti de B, le point a changé deux fois de direction en B; ce changement est mesuré par l'angle QBA, et en A il est mesuré par l'angle BAP. Donc la somme des changements de direction subis pendant le parcours de l'arc AMB est égale à quatre angles droits moins la somme des angles QBA + BAP; et, d'après le lemme précédent, cette différence est égale à l'angle formé par les perpendiculaires aux tangentes, c'est-à-dire par les normales. C. Q. F. D.

Observation. Lorsque les normales sont parallèles, elles sont censées former ensemble deux angles droits; de même lorsque, formant une droite, elles sont dirigées en sens opposés. Ainsi, un point décrivant une demi-circonférence ou une demi-ellipse, la somme de ses changements de direction est égale, dans les deux cas, à deux angles droits. Il faut toujours prendre la normale dirigée vers le centre de courbure.

Remarque. Pour les polygones réguliers étoilés, voir tome VIII, page 68.