

**Arithmologie. Théorème.**  $a$  étant un nombre positif ou négatif de la forme  $6 + 1$  ;  $b$  un nombre positif de la forme  $2 + 1$  et  $x$  une quantité quelconque on a l'équation 
$$\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2 - b^2)x^{a^2+3b^2} = 0$$

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 9 (1850), p. 174-177

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1850\\_1\\_9\\_\\_174\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__174_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

## ARITHMOLOGIE.

---

**THÉOREME.** *a étant un nombre positif ou négatif de la forme  $\hat{6} + 1$  ; b un nombre positif de la forme  $\hat{2} + 1$  et x une quantité quelconque, on a l'équation*

$$\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}} b (a^2 - b^2) x^{a^2 + 3b^2} = 0 \text{ (*)}.$$

(JACOBI. Crelle, tome XXI, page 13; 1840.)

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que la somme des termes où x a le même exposant est nulle. Faisons

$$a^2 + 3b^2 = a'^2 + 3b'^2;$$

on satisfait, comme on sait, à cette équation par les huit valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a' &= \pm \frac{a - 3b}{2}, & b' &= \pm \frac{a + b}{2}, \\ a' &= \pm \frac{a + 3b}{2}, & b' &= \pm \frac{a - b}{2}. \end{aligned}$$

Mais, d'après l'hypothèse, pour que  $x^{a'^2 + 3b'^2}$  appartienne à la série, il faut que  $a'$ , positif ou négatif, soit de la forme  $\hat{6} - 1$ , et que  $b'$  soit positif et de la forme  $\hat{2} + 1$ ; ces conditions vont réduire le nombre de ces valeurs à une seule.

En effet,  $a$  étant impair, il n'y a que ces deux cas pos-

---

(\*) Nous mettons le point leibnizien pour indiquer un multiple.

sibles :

*Premier cas.*  $\frac{a+b}{2}$  pair,  $\frac{a-b}{2}$  impair,

*Deuxième cas.*  $\frac{a+b}{2}$  impair,  $\frac{a-b}{2}$  pair.

Représentons par  $\frac{a+\varepsilon b}{2}$  les *impairs* de ces quatre nombres : alors à  $\varepsilon = +1$  correspond le deuxième cas, et à  $\varepsilon = -1$  correspond le premier cas ; donc

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

Comme  $b'$  est impair, on a donc

$$b' = \pm \frac{a+\varepsilon b}{2} ;$$

le nombre correspondant de  $a'$  est donc

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}$$

(on change  $b$  en  $-\varepsilon b$ ) : mais  $b'$  devant être positif, nous pouvons écrire

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \varepsilon' \frac{a+\varepsilon b}{2},$$

$\varepsilon'$  étant  $= +1$  lorsque  $\frac{a+\varepsilon b}{2}$  est positif, et  $\varepsilon' = -1$

lorsque  $\frac{a+\varepsilon b}{2}$  est négatif.

Si dans  $a'$  nous prenons le signe supérieur, alors  $2a' - a$  devient divisible par 3 : mais  $a$  et  $a'$  étant tous de la forme  $\hat{c} + 1$ ,  $2a' - a$  divisé par 3 laisse pour reste 1 ; le signe supérieur doit donc être rejeté ; on a donc

$$a' = - \frac{a-3\varepsilon b}{2}.$$

$2a' + a$  est divisible par 3, et  $a$  étant de la forme  $\dot{6} + 1$ ,  $2a'$  est de la forme  $\dot{3} + 2$ , et par conséquent  $a'$  de la forme  $\dot{3} + 1$ . Or on a

$$2b'\varepsilon' = a + b\varepsilon \quad (\text{car } \varepsilon'^2 = 1), \quad \text{et} \quad 2a' = 3b\varepsilon - a;$$

donc

$$a' + b\varepsilon' = 2b\varepsilon.$$

$b$  étant impair,  $a'$  est donc aussi impair; donc  $a'$  est de la forme  $\dot{6} + 1$ . Ainsi

$$(1) \quad a' = \frac{3\varepsilon b - a}{2}, \quad b' = \varepsilon' \frac{a + \varepsilon b}{2};$$

ou en déduit

$$2) \quad a = \frac{3b'\varepsilon' - a'}{2}, \quad b = \varepsilon \frac{a' + \varepsilon' b'}{2}.$$

Les équations (2) sont de la même forme que les équations (1),  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  ont changé de rôle; et comme  $b$  doit être impair, on voit que, pour  $\varepsilon' = +1$ ,  $\frac{a' + b'}{2}$  est impair, et  $\frac{a' - b'}{2}$  pair; et pour  $\varepsilon' = -1$ ,  $\frac{a' - b'}{2}$  est impair et  $\frac{a' + b'}{2}$  est pair; donc

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{a' - b'}{2}}.$$

Les équations (2) montrent que les mêmes opérations par lesquelles on a déduit  $a'$  et  $b'$  de  $a$  et de  $b$ , conduiraient de  $a'$  et  $b'$  vers  $a$  et  $b$ ; les deux systèmes de valeurs  $a, b$  et  $a', b'$  ont donc une relation de réciprocité, et, en continuant les opérations, on reviendrait aux précédentes valeurs. Il suffit donc, pour la démonstration, que les deux coefficients de  $x^{a^2 + 3b^2}$  et de  $x^{a'^2 + 3b'^2}$  soient égaux et de signes opposés.

La somme de ces coefficients est

$$(-1)^2 \frac{a-b}{b(a^2-b^2)} + (-1)^{-2} \frac{+a'-b'}{b'(a'^2-b'^2)}.$$

Substituant pour  $a'$  et  $b'$  les valeurs tirées de l'équation (1), on a

$$a'^2 - b'^2 = -2\epsilon b(a - \epsilon b),$$

et de là

$$b'(a'^2 - b'^2) = -\epsilon\epsilon' b(a^2 - b^2);$$

la somme des coefficients devient donc

$$b(a^2 - b^2) \left[ (-1)^2 \frac{a-b}{b(a^2-b^2)} - \epsilon\epsilon' (-1)^{-2} \frac{a'-b'}{b'(a'^2-b'^2)} \right].$$

Mais

$$\epsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}, \quad \epsilon' = (-1)^{\frac{a'-b'}{2}},$$

d'où

$$\epsilon\epsilon' (-1)^{\frac{a'-b'}{2}} = (-1)^{\frac{a-b}{2}};$$

donc cette somme est nulle.

C. Q. F. D.

*Observation.* Le cas peut se présenter où  $a' = a$  et  $b' = b$ ; alors la première des équations (2) donne

$$a = b\epsilon; \quad \text{donc} \quad a^2 - b^2 = 0;$$

ce qui vérifie évidemment le théorème.

-----