

Théorème de M. Joachimsthal sur l'intersection de deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 9
(1850), p. 169-171

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__169_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL SUR L'INTERSECTION DE
DEUX CONIQUES.**

(Journal de M. Crelle, tome XXXVI, page 196; 1848.)

I. *Lemme.* Toutes les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par des tangentes d'arcs réels ou imaginaires; une fonction symétrique de ces arcs est une quantité réelle.

II. *Lemme.* Soit

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0$$

une équation algébrique de degré m ; si l'on a

$$A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \dots = 0,$$

la somme des arcs-racines est un multiple de π ; et si l'on a

$$A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \dots = 0,$$

la somme des arcs-racines est un multiple de $\frac{\pi}{2}$.

La démonstration est fondée sur la formule connue qui exprime la tangente de la somme des m arcs, et sur les relations newtonniennes entre les coefficients d'une équation et les racines.

III. *Lemme.* Deux coniques situées dans un même plan ont un système d'axes conjugués en commun.

IV. Soient, dans un même plan, deux coniques à centre; prenons pour axes coordonnées le système commun d'axes *conjugués*, et pour origine le centre de l'une de ces coniques: les équations de ces courbes seront de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0, \\ A y^2 + C x^2 + D y + E x + F = 0 \end{cases}$$

Faisons dans la première équation $x = a \cos \alpha$, nous aurons $y = b \sin \alpha$; dans les points communs aux deux coniques, ces valeurs doivent aussi satisfaire à la seconde équation. Faisant la substitution, on obtient

$$A b^2 \sin^2 \alpha + C a^2 \cos^2 \alpha + D b \sin \alpha + E a \cos \alpha + F = 0.$$

Un calcul facile donne

$$(2) \quad \begin{cases} \tan^4 \alpha [(A b^2 + F)^2 - D^2 b^2] - 2 a b D E \tan^2 \alpha \\ + \tan^2 \alpha [2(A b^2 + F)(C a^2 + F) - b^2 D^2 - a^2 E^2] \\ - 2 D E a b \tan \alpha + (C a^2 + F)^2 - E^2 a^2 = 0. \end{cases}$$

Comparant avec le lemme II, nous avons

$$A_1 - A_3 = 0;$$

donc la somme des arcs-racines est un multiple de π . On peut faire de ce résultat le sujet d'un théorème qui devient celui que M. Joachimsthal a énoncé sans démonstration, en supposant que la seconde conique est un cercle, et alors la première conique est une ellipse rapportée à ses axes principaux.

V. Si dans l'équation (2) nous avons

$$A_0 - A_2 + A_4 = 0 \quad (\text{lemme II}),$$

ou bien, toute réduction faite,

$$A b^2 - C a^2 = 0;$$

alors la somme des arcs-racines aux points d'intersection est un multiple de $\frac{\pi}{2}$.

VI. Lorsque la première conique est une hyperbole, son équation étant de la forme

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 = 0,$$

on fera

$$x = a \sec \alpha, \quad \text{et} \quad y = b \tan \alpha.$$

On trouve que lorsqu'on a la relation

$$A b^2 + C a^2 + F = 0,$$

la somme des arcs-racines aux points d'intersection est un multiple de π , et un multiple de $\frac{\pi}{2}$ pour la relation

$$A b^2 + C a^2 - F - D b = 0.$$