Nouvelles annales de mathématiques

C.-E. Page

Programme d'un cours de mécanique élémentaire, troisième article

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 154-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__154_1>

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

TROISIÈME ARTICLE (voir page 89 de ce volume),

PAR M. C.-E. PAGE.

Inertie.

18. Nous avons déjà vu que les états de repos et de mouvement sont purement relatifs. Un corps est en repos quand il conserve la même position relativement à un système qui peut avoir lui-même un mouvement qu'on ignore et dont on fasse abstraction.

Lorsqu'un point quelconque d'un corps se meut suivant une certaine direction et avec une certaine vitesse, on peut toujours concevoir un système géométrique animé d'un mouvement de translation suivant la même direction et avec la même vitesse : le point est en repos relativement à ce système (*). On appelle *force* toute cause, quelle qu'elle soit, qui le fait sortir de cet état de repos, c'est-à-dire qui modifie, soit en grandeur, soit en direction, sa vitesse primitive.

C'est ce que l'on exprime en disant : 1° qu'un corps ne peut passer de l'état de repos à l'état de mouvement sans l'influence d'une cause quelconque appelée *force ;* 2° que lorsqu'un corps est en mouvement, il doit continuer à se mouvoir indéfiniment suivant la même direction et avec la même vitesse, à moins que son mouvement ne se trouve modifié par l'action d'une force.

Tel est l'énoncé de ce qu'on nomme le principe d'inertie, ce qui n'est, au fond, que la définition du mot force ; car cela revient à dire qu'on appelle force toute cause, quelle qu'elle soit, qui modifie, soit en grandeur, soit en direction, un mouvement déjà existant.

Des forces.

19. La nature même des forces nous étant inconnue, nous ne pouvons les apprécier que par les effets qu'elles produisent. Or, lorsqu'un point quelconque d'un corps reçoit un accroissement de vitesse suivant une certaine direction, nous regardons cet accroissement de vitesse comme l'effet d'une force appliquée à ce point et suivant cette direction. Nous avons donc une idée claire du point d'application et de la direction d'une force. Il nous reste à les comparer sous le rapport de l'intensité ; pour cela, il

---

(*) Ce mode de démonstration a été donné par Kant. Tm.

faut commencer par définir ce que l'on entend par forces égales.

Deux forces sont égales, lorsque, étant appliquées à un même point et pendant le même temps, elles impriment à ce point le même accroissement de vitesse, chacune suivant sa direction, quelle que soit d'ailleurs la vitesse préexistante. Il résulte de là :

1°. Que deux forces égales et directement opposées appliquées à un même point se neutralisent; car elles lui impriment à chaque instant des vitesses égales et contraires qui se détruisent.

2°. Une force dont l'intensité reste constante imprime à son point d'application une vitesse proportionnelle au temps pendant lequel elle agit. En effet, deux forces égales agissant successivement sur le même point, dans le même sens et pendant le même temps, impriment des accroissements de vitesse égaux; donc, l'accroissement total, produit par les actions successives des deux forces, est double de l'accroissement produit par l'action d'une seule. Or, si la seconde commence à agir justement à l'instant où la première cesse, c'est exactement comme si la première continuait à agir pendant un temps double. On verrait de même que la vitesse produite au bout d'un temps triple serait triple, et ainsi de suite; d'où il est facile de conclure que la vitesse produite par une force constante est proportionnelle au temps pendant lequel cette force continue d'agir.

3°. Enfin, les forces sont entre elles dans le rapport des vitesses qu'elles impriment au même point dans des temps égaux. En effet, les accroissements de vitesse imprimés au même point par deux forces égales étant indépendants de l'état de repos et de mouvement, doivent rester les mêmes, quel que soit l'intervalle qui sépare les instants où elles commencent à agir; ils sont donc encore les mêmes lorsque cet intervalle est nul, c'est-à-dire lorsque les deux forces agissent simultanément. Mais deux forces égales agissant simultanément sur le même point et dans le même sens forment une force double; donc une force double produit une vitesse double, une force triple produit une vitesse triple, etc. En général, les forces appliquées à un même point sont dans le rapport des vitesses qu'elles impriment à ce point dans des temps égaux.

Il s'ensuit que, pour comparer entre elles des forces appliquées à un même point, il suffit de comparer les vitesses qu'elles imprimeraient à ce point pendant le même temps, en une seconde par exemple; par suite, ces forces peuvent être représentées en grandeur et en direction au moyen des droites qui représentent en grandeur et en direction les vitesses qu'elles sont capables de produire en une seconde.

20. Jusqu'ici, nous avons supposé que l'intensité de la force restait constante pendant toute la durée de son action; mais l'on conçoit très-bien qu'il peut en être autrement, et que cette intensité peut varier d'une manière continue. On peut donc se proposer le problème suivant : Étant donnée la loi suivant laquelle l'intensité d'une force varie en fonction du temps, trouver la vitesse acquise par le point d'application au bout d'un temps donné.

Pour cela, sur une droite indéfinie, prenons des longueurs proportionnelles au temps, puis supposons qu'une perpendiculaire glisse le long de cette droite en variant de longueur suivant la même loi que l'intensité de la force; l'extrémité de cette perpendiculaire décrit une certaine courbe, et la surface limitée par cette courbe et par les deux ordonnées extrêmes correspondantes à deux instants donnés représente l'accroissement de vitesse que le point d'application a reçu pendant l'intervalle qui sépare ces deux instants. [La démonstration est la même que celle que nous avons donnée pour le mouvement varié (5)].

Nous rencontrerons plus tard des questions où nous aurons à considérer des forces d'une intensité variable; mais, dans ce qui va suivre sur la composition des forces, nous supposerons que leur intensité reste constante pendant toute la durée de leur action : par conséquent, tant qu'elles agissent, la vitesse du point d'application croît proportionnellement au temps, le mouvement est uniformément varié, et les espaces croissent proportionnellement au carré du temps.

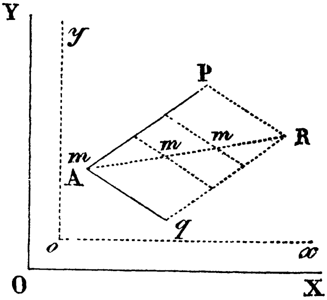
Dans tous les cas, que la force soit constante ou variable, la vitesse du point d'application cesse de varier à l'instant où la force cesse d'agir sur lui, et ce point, s'il n'est soumis à l'action d'aucune autre force, continue à se mouvoir d'un mouvement rectiligne et uniforme, en vertu de la vitesse acquise.

Composition des forces appliquées à un même point.

21. L'accroissement de vitesse qu'une force imprime suivant sa direction à son point d'application, est indépendant de l'état de repos ou de mouvement de ce point; par conséquent, si plusieurs forces sont appliquées simultanément au même point suivant des directions quelconques, leurs actions doivent être indépendantes l'une de l'autre, et chacune d'elles doit produire, suivant sa direction, le même accroissement de vitesse que si elle agissait seule; d'où l'on peut prévoir que les forces doivent se composer entre elles de la même manière que les vitesses. C'est ce que nous allons démontrer directement.

22. Un point mobile m (*fig.* 1) étant d'abord situé en un point A rapporté au système fixe OX, OY, supposons qu'on lui applique une force constante représentée en grandeur et en direction par la droite Ap ; le point mobile entraînant avec lui le point A, marche dans la direction de Ap avec une vitesse croissant proportionnellement au temps, et parcourt des longueurs proportionnelles aux carrés des temps.

fig 1.



Nous pouvons toujours concevoir un système mobile ox, oy, se mouvant d'un mouvement de translation avec une vitesse justement égale à celle du point A, de manière que ce point reste en repos relativement au système.

Maintenant, supposons qu'on applique au point mobile m, et en même temps que la première force, une seconde force représentée en grandeur et en direction par la droite Aq; le point mobile quittant le point A marche dans la direction de Aq avec une vitesse croissant proportionnellement au temps, et parcourt des longueurs proportionnelles aux carrés des temps: de sorte que, tandis que la droite Aq marche parallèlement à elle-même en glissant le long de la droite Ap, le point mobile glisse le long de la droite Aq.

Les longueurs parcourues suivant ces deux directions étant toujours dans le rapport de Ap à Aq, le point mobile ne quitte pas la diagonale AR du parallélogramme construit sur ces lignes. Les vitesses acquises dans le sens de la diagonale sont aux vitesses acquises dans le sens des côtés comme la diagonale est à ces mêmes côtés, et les chemins parcourus sont dans le même rapport; donc le mouvement du point mobile, par rapport au système fixe, est exactement le même que si ce point était sollicité par une force unique représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale AR.

Cette force unique, qui produit le même effet que deux forces données, se nomme leur *résultante*. Donc la résultante de deux forces appliquées en un même point est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les forces données.

Lorsqu'on sait trouver la résultante de deux forces, il est facile de trouver la résultante d'autant de forces qu'on voudra; ainsi, par exemple, on peut voir que la résultante de trois forces appliquées en un même point, et non situées dans le même plan, est représentée par la diagonale du parallélipipède construit sur les trois composantes.

Par la même raison qu'on peut composer trois forces en une seule, on peut décomposer une force en trois autres.

Si les trois composantes sont rectangulaires, chacune d'elles est la projection de la résultante sur sa direction.

Lorsqu'on veut composer en une seule plusieurs forces appliquées en un même point, on commence par projeter chacune de ces forces sur trois axes rectangulaires, on fait la somme des projections sur chacun de ces axes, on a ainsi trois composantes; en prenant la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois composantes, on a la résultante de toutes les forces données.

Si l'on applique une dernière force égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, on établit une compensation exacte entre toutes les vitesses produites, et le point d'application reste en repos. On dit que des forces sont en *équilibre*, quand elles neutralisent réciproquement leurs actions. Pour que plusieurs forces soient en équilibre, il faut et il suffit que chacune d'elles soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

Il est facile de voir que la projection de la diagonale d'un parallélogramme sur une direction quelconque est égale à la somme des projections des deux côtés adjacents; d'où l'on peut conclure que la projection de la résultante d'autant de forces qu'on voudra est égale à la somme des projections de toutes les composantes (bien entendu que les projections qui tombent en sens contraires doivent être prises avec des signes différents).

La résultante est donc toujours égale à la somme des projections de toutes les composantes sur sa propre direction. Par conséquent, si l'on représente par R la résultante des forces P, P′, P″, etc., et par p, p', p'', etc., les projections de ces forces sur la direction de la résultante, on aura

$$R = p + p' + p'' + \ldots.$$

En appelant v la vitesse effective acquise à un instant quelconque par le point d'application dans le sens de la résultante, on aura

$$R.v = p.v + p'.v + p''.v + \ldots.$$

On appelle *travail élémentaire* d'une force, le produit de la vitesse du point d'application par la projection de la force sur la direction de cette vitesse. Ce produit est appelé *travail élémentaire moteur* quand la force tend à augmenter la vitesse, et *travail élémentaire résistant* dans le cas contraire. Lorsque le travail élémentaire moteur est pris comme *positif*, le travail élémentaire résistant doit être pris comme *négatif*.

On a donc ce théorème : *Le travail élémentaire de la* *résultante est égal à la somme des travaux élémentaires de toutes les composantes.*

Dans le cas d'équilibre, la vitesse effective du point d'application, c'est-à-dire la vitesse résultant de l'action des forces, est nulle ; mais en remplaçant la vitesse effective par une vitesse virtuelle, c'est-à-dire par une vitesse quelconque que le point est susceptible de prendre indépendamment de l'action des forces, le théorème a encore lieu.

En effet, dans le cas d'équilibre, la somme des projections des forces sur une direction quelconque est toujours nulle ; en multipliant toutes ces projections par la vitesse que le point d'application est susceptible de prendre suivant cette direction, la somme des produits est encore nulle. Pour distinguer ce produit de celui où l'on fait usage de la vitesse effective, nous l'appellerons *travail élémentaire virtuel*. Nous aurons donc ce théorème :

Pour que des forces appliquées en un même point soient en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires virtuels de toutes ces forces soit nulle.

Il faut remarquer que le produit de la vitesse du point d'application par la projection de la force sur la direction de cette vitesse est égal au produit de la force par la projection de la vitesse sur la direction de cette force ; par conséquent, on peut prendre indifféremment l'un ou l'autre de ces produits pour le travail élémentaire de la force.

Transmission du travail élémentaire. Principe des vitesses virtuelles.

23. Lorsque des points sont liés entre eux, de manière qu'ils ne puissent se mouvoir indépendamment les uns des autres, toute force appliquée à l'un d'eux est né-

cessairement transmise aux autres. Cherchons de quelle manière cette transmission s'opère.

Dans la réalité, lorsqu'un corps est soumis à l'action d'une force, il commence par fléchir et se comprimer plus ou moins ; mais comme il arrive un instant où cette déformation cesse d'avoir lieu, nous pouvons en faire abstraction, et supposer que les différents points d'un corps sont liés entre eux par des droites d'une longueur invariable.

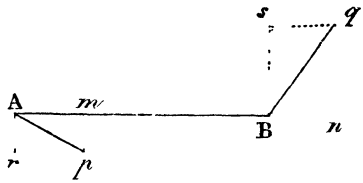
Ainsi, par exemple, les trois sommets d'un triangle, les quatre sommets d'un tétraèdre, sont fixement liés entre eux lorsque les longueurs des côtés et des arêtes sont invariables. Nous pouvons toujours concevoir les différents points d'un système réunis entre eux par un réseau de triangles et de tétraèdres.

Les droites invariables forment ce que l'on nomme les *liaisons géométriques du système.*

Quel que soit le mouvement qu'un pareil système soit susceptible de prendre, les projections sur une de ces droites des vitesses virtuelles de ses deux extrémités seront toujours égales et dirigées dans le même sens.

En effet, soit AB (*fig.* 2), page 164, l'une de ces droites de longueur invariable; soient Ap et Bq les lignes qui représentent en grandeur et en direction les vitesses virtuelles des points A et B : la vitesse Ap peut être décomposée en deux autres, l'une Am dirigée suivant AB, l'autre Ar perpendiculaire à AB. La vitesse Bq peut être décomposée de même en Bn et Bs. Or, puisque la distance AB doit rester invariable, il faut nécessairement que les deux vitesses composantes Am et Bn, dirigées suivant AB, soient égales et dirigées dans le même sens.

fig. 2



Si des forces appliquées en A et B (*fig.* 2) tendent à rapprocher ou à écarter ces points l'un de l'autre, leur action est détruite par la résistance de la droite AB. Cette résistance donne donc naissance à des *forces intérieures* dirigées suivant AB, et appliquées en sens contraires aux deux points A et B; de plus, ces forces intérieures sont égales entre elles.

En effet, on admet comme un axiome, que deux forces égales et directement opposées, appliquées aux extrémités A et B d'une droite invariable, se font équilibre; car il n'y aurait pas de raison pour que le mouvement commençât plutôt dans un sens que dans l'autre. Chacun des points A et B étant maintenu séparément en équilibre par la résistance de la droite AB, il faut bien admettre que les forces intérieures qui naissent de cette résistance sont égales entre elles.

Si les forces appliquées en A et B sont inégales, il y a un mouvement produit par l'excès de la plus grande sur la plus petite, et il reste deux forces égales à la plus petite qui se détruisent; ce sont ces deux forces égales qui tendent à produire le rapprochement ou l'écartement des deux points, et auxquelles les forces intérieures doivent faire équilibre.

Les projections sur la droite AB des vitesses virtuelles des points A et B étant égales et dirigées dans le même sens, les forces intérieures dues à la résistance de cette droite étant égales et dirigées en sens contraires, il est évident que les travaux élémentaires dus à ces forces seront toujours égaux et de signes contraires : donc leur somme sera nulle.

Il en est de même pour toutes les forces intérieures dirigées suivant les droites qui forment les liaisons du système. Nous pouvons donc conclure que la somme des travaux élémentaires dus aux forces intérieures résultant des liaisons est toujours nulle.

Lorsque, par l'action des forces extérieures, le système est mis en mouvement, chaque point mobile est sollicité par une force immédiate telle, que si ce point était indépendant de tous les autres, il prendrait le même mouvement que celui qu'il prend réellement. Cette force immédiate qui produit le mouvement d'un point est évidemment la résultante de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui le sollicitent. Le travail élémentaire de cette résultante est égal à la somme des travaux élémentaires de toutes ses composantes ; par conséquent, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces immédiates est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui sollicitent tous les points mobiles ; mais la somme des travaux élémentaires de toutes les forces intérieures est toujours nulle ; nous avons donc ce théorème fondamental qui renferme, pour ainsi dire, toute la mécanique :

La somme des travaux élémentaires de toutes les résultantes immédiates auxquelles sont dus les mouvements des différents points d'un système, est égale à la somme des travaux élémentaires des forces extérieures appliquées à ce système.

Nous entendons par forces *immédiates* les forces qui, étant appliquées aux différents points d'un système supposés indépendants les uns des autres, leur imprimeraient les mêmes vitesses qu'ils prennent en vertu des liaisons qui existent entre eux.

Nous aurons souvent à revenir sur ce théorème dont les autres principaux théorèmes de mécanique ne sont, en quelque sorte, que les corollaires. Nous commencerons par en déduire le principe général de l'équilibre.

Le travail élémentaire de la force immédiate qui produit le mouvement d'un point est toujours positif; car la vitesse effective étant due à l'action de cette seule force, est évidemment dirigée dans le même sens qu'elle. Par conséquent, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces immédiates est égale à l'excès de la somme des travaux élémentaires moteurs sur la somme des travaux élémentaires résistants de toutes les forces extérieures. Si ces deux sommes sont égales, toutes les forces immédiates sont nulles, il n'y a aucun mouvement produit, et les forces extérieures sont en équilibre.

Mais alors les vitesses effectives des points d'application des forces extérieures étant nulles, il faut remplacer les vitesses effectives par les vitesses virtuelles; on a donc ce théorème :

Pour que des forces dirigées et appliquées d'une manière quelconque soient en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires virtuels de ces forces soit nulle.

Ce théorème est connu sous le nom de *principe des vitesses virtuelles*.

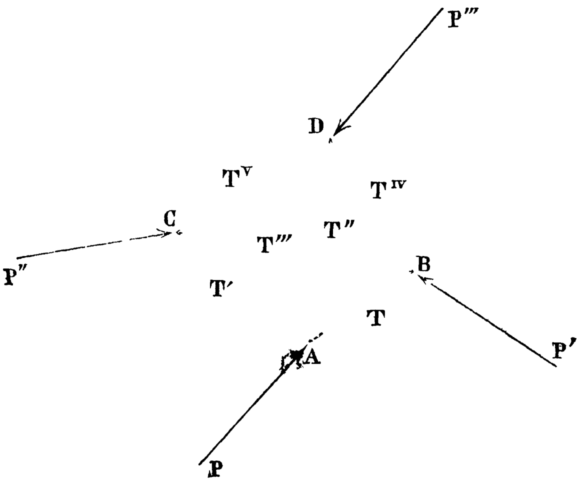
Si les forces extérieures ne sont pas en équilibre, il est clair qu'on établira l'équilibre en appliquant à chaque point mobile une force égale et directement opposée à la résultante immédiate qui le sollicite. On ramène ainsi toutes les questions de mécanique à des questions d'équilibre. C'est pour cette raison qu'on commence l'étude de la mécanique par la *statique*, qui est la science de l'équilibre. On appelle *dynamique* la partie de la mécanique qui traite de la production des mouvements par l'action des forces.

Statique.

24. Avant de faire des applications du principe des vitesses virtuelles, nous insisterons de nouveau sur sa démonstration à cause de son importance.

Soient A, B, C, D (*fig.* 3) les quatre sommets d'un tétraèdre dont les arêtes ont des longueurs invariables

fig. 3



Soient P, P', P'', P''' des forces appliquées a ces points. Représentons par p la projection de la vitesse virtuelle du point A sur la direction de la force P, et de même par p', p'', p''' les projections des vitesses virtuelles des points B, C, D sur les directions des forces P , P'', P'''. Pour qu'il y ait équilibre, il faudra qu'on ait

$$\mathrm{P}\, p + \mathrm{P}'.p' + \mathrm{P}''.p'' + \mathrm{P}'''.p'' = 0$$

En effet, représentons par T les forces intérieures provenant de la résistance de l'arête AB et appliquées en sens contraires aux deux extrémités A et B.

Soit t la projection de la vitesse virtuelle du point A sur la direction de AB, la projection sur la même direction de la vitesse virtuelle du point R sera aussi égale à t; mais le travail élémentaire virtuel de la force T au point A étant égal à $+T.t$, le travail élémentaire virtuel au point B sera $-T.t$.

En représentant de même par T', T'', T''', T^{iv}, T^{v} les forces intérieures dues aux résistances des arêtes AC, AD, BC, BD, CD, et par t', t'', t''', t^{iv}, t^{v} les projections sur ces arêtes des vitesses virtuelles de leurs extrémités, on aura pour les travaux élémentaires virtuels développés aux deux extrémités

de l'arête AB,	$+T.t$	et	$-T.t$;
de l'arête AC,	$+T'.t'$	et	$-T'.t'$;
de l'arête AD,	$+T''\ t''$	et	$-T''.t''$;
de l'arête BC,	$+T'''\ t'''$	et	$-T'''.t'''$;
de l'arête BD,	$+T^{\text{iv}}.t^{\text{iv}}$	et	$-T^{\text{iv}}.t^{\text{iv}}$;
de l'arête CD,	$+T^{\text{v}}.t^{\text{v}}$	et	$-T^{\text{v}}.t^{\text{v}}$.

Pour que le système soit en équilibre, il faut que chaque point séparément soit en équilibre. Nous aurons pour l'équilibre des forces

Autour du point A, $P.p+T.t+T'.t'+T''.t''=0$;
Autour du point B, $P'.p'-T.t+T'''.t'''+T^{\text{iv}}.t^{\text{iv}}=0$;
Autour du point C, $P''.p''-T.t'-T'''.t'''+T^{\text{v}}.t^{\text{v}}=0$;
Autour du point D, $P'''.p'''-T^{\text{iv}}.t^{\text{iv}}-T''.t''-T^{\text{v}}.t^{\text{v}}=0$.

En faisant la somme, on voit que tous les termes qui représentent les travaux élémentaires virtuels des forces intérieures dues aux résistances se détruisent, et il reste

$$P.p+P'.p'+P''.p''+P'''\ p'''=0.$$

Cette démonstration s'étend à autant de points et autant de forces qu'on voudra.

Elle s'applique aussi bien à un système gêné dans ses mouvements qu'à un système entièrement libre, puisque l'on entend par vitesses virtuelles, les vitesses que les différents points sont susceptibles de prendre en vertu des mouvements possibles. Ainsi, par exemple, supposons qu'il y ait un point fixe O. La droite OA, menée du point fixe au point mobile A, n'a que la liberté de tourner autour du point fixe; par conséquent, la vitesse virtuelle du point A est toujours perpendiculaire à la droite OA, et sa projection sur cette droite est nulle: donc le produit d'une force intérieure dirigée suivant OA par la projection de la vitesse virtuelle du point A sur la direction de cette force est nul de lui-même.

Pour faire usage du principe des vitesses virtuelles, il faut supposer un des mouvements possibles du système auquel les forces sont appliquées, puis égaler à zéro la somme des travaux élémentaires virtuels correspondants; on obtient ainsi la condition à laquelle les forces doivent satisfaire pour neutraliser réciproquement leurs actions par rapport à ce mouvement possible. Il suit de là qu'on doit toujours avoir autant de conditions d'équilibre que le système peut prendre de mouvements différents; chacune de ces conditions indiquant que les forces se neutralisent réciproquement par rapport à l'un de ces mouvements possibles. (*La suite prochainement.*)