AUGUSTE HERBÉ

Question d'examen n° 97

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__144_1>

QUESTION D'EXAMEN N° 97

(voir t. IX, p. 40).

PAR M. AUGUSTE HERBÉ,
Élève au lycée de Reims (classe de M. Sornin).

THÉORÈME. $\dfrac{(x^m - 1)(x^{m-1} - 1)(x^{m-2} - 1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}$ *est toujours entier, m étant un nombre positif entier quelconque.*

Démonstration. Le dénominateur est égal à

$$(x-1)^3 (x+1)(x^2 - x + 1),$$

et les facteurs $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - x + 1$ sont premiers entre eux. Or le numérateur est évidemment divisible par $(x-1)^3$: un des trois nombres consécutifs m, $m-1$, $m-2$ est nécessairement pair; donc l'un des facteurs du numérateur est divisible par $x+1$: un des trois mêmes nombres consécutifs est divisible par 3; donc un des facteurs du numérateur est divisible par $x^3 - 1$.

C. Q. F. D.

Note. Comment prouve-t-on que l'expression

$$\frac{(x^m - 1)(x^{m-1} - 1)\ldots(x^{m-p} - 1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{p+1} - 1)}$$

est entière pour une valeur entière positive de m?