

H. EMERY

Solution de la question 191

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 45-46

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__45_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 191

(t. VII, p. 368).

PAR M. H. ÉMERY,

Elève du lycée de Versailles.

Trouver la $n^{\text{ème}}$ dérivée de $x^n (x - 1)^n$, et démontrer que cette dérivée, égalée à zéro, a n racines réelles comprises entre 0 et 1.

I. L'équation $x^n (x - 1)^n = 0$, ayant toutes ses racines réelles, savoir : n racines égales à zéro et n égales à l'unité, il suit du théorème de Rolle que toutes les racines des dérivées sont aussi réelles et comprises entre 0 et 1 ; mais la $n^{\text{ème}}$ dérivée est la première qui n'ait aucune racine, soit nulle, soit égale à l'unité.

Recherche de la dérivée.

II. — *Première méthode.* On a, par le développement binomial,

$$x^n (x-1)^n = x^{2n} - \frac{[n]}{[n-1]} x^{2n-1} + \frac{[n]}{[2][n-1]} x^{2n-2} - \dots + (-1) x^n$$

où les crochets indiquent un produit continu.

Prenant la dérivée $n^{\text{ième}}$ de chaque terme, on a pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ cherchée :

$$\frac{d^n [x(x-1)]^n}{dx^n} = [2n] x^n - \frac{[n]}{[n-1]} \frac{[2n-1]}{[n-1]} x^{n-1} \\ + \frac{[n]}{[2]} \frac{[2n-2]}{[n-2]} x^{n-2} - \dots + (-1)^n [n].$$

III. — *Lemme.* F et φ étant des fonctions de x , on obtient la $n^{\text{ième}}$ dérivée du produit $F\varphi$ en faisant le développement binomial de $(F + \varphi)^n$, mais en prenant les exposants comme des indices de dérivation, et écrivant pour premier terme $\varphi F^{(n)}$, et pour dernier terme $F\varphi^{(n)}$.

Démonstration. On a, pour

Première dérivée, $\varphi F' + F\varphi'$;

Deuxième dérivée, $\varphi F'' + 2F'\varphi' + F\varphi''$;

Troisième dérivée, $\varphi F''' + 3\varphi' F'' + 3\varphi'' F' + F\varphi'''$;

et, par induction, la dérivée d'indice p sera

$$\varphi F^{(p)} + p \cdot \varphi' F^{(p-1)} + \frac{p \cdot p-1}{1 \cdot 2} \varphi'' F^{(p-2)} + \dots + F\varphi^{(p)}.$$

Prenant la dérivée de ce développement, on obtient une même loi de formation pour la dérivée suivante d'indice $p+1$; donc cette loi est générale.

IV. — *Deuxième méthode.* Faisons $\varphi = x^n$, $F = (x-1)^n$; on aura, en appliquant le lemme et divisant le résultat égalé à zéro par $[n]$,

$$[x-1]^n + n^2 x [x-1]^{n-1} + \left[\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \right]^2 x^2 (x-1)^{n-1} \\ + \left[\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right]^3 x^3 (x-1)^{n-2} + \dots + x^n = 0.$$

Cette équation n'a évidemment aucune racine négative; car prenant x négatif, tous les termes sont positifs, n étant pair, et tous les termes sont négatifs, n étant impair, et x ne peut surpasser l'unité : donc, comme on l'a vu a priori, toutes les racines sont comprises entre 0 et 1.