

F. AGARRAT

Solution de la question 208

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 443-444

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__443_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 208

(voir p. 236) ;

PAR M. F. AGARRAT,

Professeur de mathématiques supérieures au lycée d'Aix.

$F(x) = 0$ est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales; démontrer qu'en égalant à zéro la dérivée seconde de (Fx^{-1}) , l'équation $(F'x)^2 - \frac{1}{x} F(x) F''(x) = 0$, qu'on obtient ainsi, a toutes ses racines imaginaires. (CATALAN.)

Supposons que l'équation $F(x) = 0$ soit du degré m , et désignons ses racines par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$, nous pourrons écrire

$$F(x) = (x - \alpha) (x - \beta) (x - \gamma) (x - \delta) \dots$$

Posons, pour abrégé,

$$a = x - \alpha, \quad b = x - \beta, \quad c = x - \gamma, \quad d = x - \delta, \dots,$$

nous aurons

$$(1) \quad F(x) = abcd \dots;$$

$$(2) \quad F'(x) = F(x) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots \right);$$

$$(3) \quad \frac{F''(x)}{2} = F(x) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \dots + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \dots + \frac{1}{cd} \right).$$

Élevons les deux membres de l'équation (2) au carré, il viendra

$$\begin{aligned} (F'x)^2 &= (Fx)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \dots \right) \\ &+ 2F(x) \cdot F(x) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \dots + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \dots + \frac{1}{cd} + \dots \right). \end{aligned}$$

On aura donc

$$(F'x)^2 = (Fx)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \dots \right) + Fx \cdot F''(x),$$

d'où

$$\frac{(F'x)^2}{2} - \frac{1}{2} F(x) F''(x) = \frac{(Fx)^2}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \dots \right).$$

Le second membre, étant une somme de carrés, ne peut jamais devenir nul; donc le premier membre ne peut s'annuler par aucune valeur réelle de x . Cette conclusion est vraie, à plus forte raison, pour le premier membre de l'équation

$$(F'x)^2 - \frac{1}{2} Fx F''x = 0;$$

donc, etc.
