

J. COLLÈTE

**Note sur quelques formules de trigonométrie
sphérique et sur le quadrilatère
sphérique inscrit**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 435-441

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__435_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur quelques formules de trigonométrie sphérique et sur le quadrilatère sphérique inscrit;

PAR M. J. COLLÈTE,

Ancien élève de Saint-Cyr, soldat au 3^{me} regiment de marine.

I. Les formules suivantes ont été données par M. Schmeisser, professeur à Francfort-sur-l'Oder (t. VII, p. 269) :

$$(1) \quad \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C = \sin \frac{1}{2} c \cos (P - A),$$

$$(2) \quad \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C = \cos \frac{1}{2} c \cos (P - C),$$

$$(3) \quad \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C = \cos \frac{1}{2} c \cos P \quad (*),$$

$$P = \frac{A + B + C}{2}.$$

L'objet de cette Note est de démontrer ces formules, et d'en déduire d'autres formules, ainsi que quelques théorèmes de géométrie sphérique.

La démonstration consiste à prendre, en fonction des angles A, B, C du triangle, les valeurs de $\sin \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{2} b$, $\cos \frac{1}{2} a$, $\cos \frac{1}{2} b$, et de les combiner entre elles de la façon dont l'indiquent les formules en question.

(*) Il y a une erreur typographique; au lieu de $\sin P$, dans la troisième formule, il faut $\cos P$, comme je l'ai mis ici.

Et d'abord, faisons subir à la forme générale des valeurs de $\sin \frac{1}{2} a$, $\cos \frac{1}{2} a$, une modification rendue nécessaire par la question.

Dans ces valeurs générales, on suppose (voy. *Trigon. sph.*, Delisle et Géroño) que $2P = (A + B + C) - 180^\circ$, tandis qu'ici, il faut que $P = \frac{1}{2}(A + B + C)$; ce qui, soit dit en passant, est plus logique, puisqu'on agit ainsi en trigonométrie rectiligne.

On sait que

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\sin B \sin C}}.$$

Si l'on suppose

$$\frac{A+B+C}{2} = P,$$

il en résulte

$$\frac{B+C-A}{2} = P - A;$$

la formule devient

$$(4) \quad \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P-A)}{\sin B \sin C}}.$$

On trouvera de même

$$(5) \quad \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos(P-B) \cos(P-C)}{\sin B \sin C}}.$$

Enfin, on a encore les deux formules

$$(6) \quad \sin \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos P \cos(P-B)}{\sin A \sin C}},$$

et

$$(7) \quad \cos \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos(P-A) \cos(P-C)}{\sin A \sin C}}.$$

Cela fait, multiplions l'équation (4) par l'équation (7), il vient

$$\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{-\cos P \cos (P - C) \cos^2 (P - A)}{\sin A \sin B \sin^2 C}};$$

d'où l'on tire

$$\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C = \sin \frac{1}{2} C \cos (P - A),$$

puisque

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{-\cos P \cos (P - C)}{\sin A \sin B}}.$$

C'est la formule (1).

On voit qu'au moyen d'une permutation de lettres, cette formule en fournit cinq autres.

Multiplions maintenant la formule (5) par la formule (7), il vient

$$\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos (P - B) \cos (P - A) \cos^2 (P - C)}{\sin A \sin B \sin^2 C}};$$

d'où

$$\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C = \cos \frac{1}{2} C \cos (P - C).$$

C'est la formule (2); elle en fournit deux autres.

Enfin, en multipliant la formule (4) par la formule (6), on a

$$\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos (P - A) \cos (P - B) \cos^2 P}{\sin A \sin B \sin^2 C}},$$

ou bien

$$\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C = \cos \frac{1}{2} c \cos P.$$

C'est la formule (3); elle en fournit deux autres. Ces expressions vont nous conduire à quelques théorèmes.

En appelant S la surface du triangle sphérique, on a

$$S = (A + B + C) - 180^\circ;$$

donc

$$\frac{S}{2} = P - 90^\circ; \quad \text{d'où} \quad \sin \frac{S}{2} = \cos P.$$

Or la formule (3) nous donne

$$\cos P = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\sin \frac{S}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{C}{2}},$$

formule à laquelle M. Vannson (t. VII, p. 17) est arrivé autrement.

II. On sait que le quadrilatère rectiligne plan et inscriptible jouit de diverses propriétés remarquables; cherchons les propriétés correspondantes sur le quadrilatère inscrit à un petit cercle, et dont les côtés seront d'ailleurs des axes de grands cercles.

Rappelons-nous que si ρ désigne la distance polaire du petit cercle circonscrit au triangle ABC, on a

$$2 \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2} \tan \frac{c}{2} = \tan \rho \sin \frac{S}{2},$$

S désignant la surface.

Remplaçant $\sin \frac{S}{2}$ par la valeur trouvée ci-dessus, il vient, réduction faite,

$$(a) \quad \tan \rho = \frac{2 \sin \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin C}.$$

Soit, maintenant, un quadrilatère sphérique ABCD, que je suppose inscrit dans un petit cercle dont ρ est la distance polaire.

Appelons a, b, c, d les côtés, et m et n les diagonales BD et AC.

En appliquant la formule (a) au triangle ABC, on aura

$$\operatorname{tang} \rho = \frac{\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2} \sin B} ;$$

de même, le triangle ADC nous donne

$$\operatorname{tang} \rho = \frac{\cos \frac{c}{2} \sin \frac{d}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin D} .$$

Par conséquent

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} : \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2} :: \sin D : \sin B .$$

C'est le théorème correspondant à celui-ci, de géométrie plane :

Dans le quadrilatère inscrit, les angles opposés sont supplémentaires.

Si l'on fait le rayon de la sphère $= \infty$, alors $\cos \frac{a}{2}$, $\cos \frac{b}{2} \dots$ deviennent l'unité, si l'on conserve aux côtés des longueurs finies (*). Donc,

$$\sin D = \sin B .$$

Ce qu'on pouvait prévoir.

(*) Car

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2 \sin \frac{1}{2} a} ,$$

En général, la relation

$$\frac{\sin \frac{n}{2}}{\cos \frac{a}{2} \sin B} = \frac{\sin \frac{m}{2}}{\cos \frac{c}{2} \sin C}$$

servira à établir toute relation cherchée entre les diagonales.

Par exemple, faisons $r = \infty$, la relation donne

$$m : n :: \sin C : \sin B.$$

Ainsi l'on a ce théorème de géométrie plane :

Dans le quadrilatère inscrit les diagonales sont en raison inverse des sinus des angles dont elles partent.

On voit ici que ce théorème, dont j'ignorais l'existence, a été entièrement déduit de la géométrie sphérique.

On peut, d'ailleurs, le démontrer très-simplement.

En géométrie plane, on a encore, sur le quadrilatère inscrit, les deux théorèmes suivants :

1°. *Les diagonales sont comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent ensemble à leurs extrémités ;*

2°. *Le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Les théorèmes correspondants sur la sphère ne se démontreraient qu'au moyen de calculs très-longs et très-laborieux ; mais il existe un moyen simple d'y arriver.

En effet, supposons joints entre eux, par des lignes droites, les points A, B, C, D, et nous aurons formé un

et si l'on suppose le rayon de la sphère $= \infty$, on a

$$\cos \frac{a}{r} = \frac{a}{r} \approx \frac{1}{r} a$$

Il en est de même des autres,

quadrilatère plan inscrit ABCD, dans lequel on a

$$A) \begin{cases} AC : BD :: AD \cdot AB + DC \cdot CB : AD \cdot DC + AB \cdot CB. \\ AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD. \end{cases}$$

Mais, en supposant le rayon de la sphère = 1, on a

$$AC = 2 \sin \frac{n}{2}, \quad BD = 2 \sin \frac{1}{2} m, \dots$$

ainsi de suite ; remplaçant dans (A), on a

$$(B) \begin{cases} \sin \frac{1}{2} n : \sin \frac{1}{2} m :: \sin \frac{a}{2} \sin \frac{d}{2} + \sin \frac{c}{2} \sin \frac{b}{2} : \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \\ \quad + \sin \frac{d}{2} \sin \frac{c}{2} \\ \sin \frac{1}{2} n \sin \frac{1}{2} m = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} d, \end{cases}$$

formules qui deviennent celles du quadrilatère plan quand on suppose $r = \infty$.

On pourrait encore, de tout ce qui précède, déduire d'autres formules et d'autres théorèmes; je ne m'y arrêterai pas.

Enfin, on pourrait, comme précédemment, démontrer les formules suivantes :

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin c = \cos \frac{C}{2} \sin (p - b),$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin c = \sin \frac{C}{2} \sin p,$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin c = \sin \frac{C}{2} \sin (p - c),$$

$$p = \frac{a + b + c}{2};$$

et celles qu'on en déduit par des permutations entre les lettres. Toutes ces formules peuvent être obtenues aussi en appliquant celles M. Schmeisser au triangle polaire du proposé.

Note. Il reste à démontrer les réciproques des propositions B.