

Transformation remarquable d'une fonction du quatrième degré ; d'après MM. Eisenstein et Cayley

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 417-419

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__417_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATION REMARQUABLE D'UNE FONCTION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

D'APRÈS MM. EISENSTEIN ET CAYLEY.

(Journal de M. Crelle, tome XXIX, page 54; 1845.)

THÉORÈME. Soit

$$u = a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2 - 2ahbg - 2ahcf - 2ahde \\ - 2bgcf - 2bgde - 2cdef + 4adfg + 4bceh;$$

faisons

$$(1) \quad A = \frac{1}{2} \frac{du}{da}, \quad B = \frac{1}{2} \frac{du}{db}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{du}{dc}, \dots, \quad H = \frac{1}{2} \frac{du}{dh}.$$

Représentons par U ce que devient u en remplaçant $a, b, c, \dots, h$ par $A, B, C, \dots, H$; on a $U = u^3$.

Démonstration. Faisons

$$a' = v_1a + v'_1e, \quad b' = v_1b + v'_1f, \quad c' = v_1c + v'_1g, \quad d' = v_1d + v'_1h, \\ e' = v_2a + v'_2e, \quad f' = v_2b + v'_2f, \quad g' = v_2c + v'_2g, \quad h' = v_2d + v'_2h.$$

Représentons par u' ce que devient u en y mettant d'abord $a', b', c', \dots, h'$ au lieu de $a, b, c, \dots, h$; et, ensuite,

pour $a', b', c', \dots, h'$ les valeurs données ci-dessus; il vient

$$u' = (v_1 v'_2 - v_2 v'_1)^2 u.$$

Faisons

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_2 = ah - bg - cf - de, & v'_1 &= -2(ad - bc), \\ v_2 &= -2(eh - fg); \end{aligned}$$

on aura

$$v_1 v'_2 - v_2 v'_1 = u, \quad \text{d'où} \quad u' = u^3.$$

Or, d'après les valeurs (1), on a

$$\begin{aligned} a' &= H, & b' &= -G, & c' &= -F, & d' &= E, \\ h' &= A, & g' &= -B, & f' &= -C, & e' &= D; \end{aligned}$$

donc

$$U = u^3.$$

Remarque. M. Eisenstein avait donné sans démonstration la formule suivante

$$\begin{aligned} (a^2 d^2 - 3 b^2 c^2 + 4 a c^3 + 4 d b^3 - 6 a b c d)^3 \\ = A^2 D^2 - 3 B^2 C^2 + 4 A C^3 + 4 D B^3 - 6 A B C D; \end{aligned}$$

A, B, C, D ayant les valeurs (1). (Crelle, tome XXVII. page 105; 1844.)

M. Cayley a démontré cette formule et l'a même considérablement généralisée, de cette manière :

Imaginons la fonction u

$$\begin{aligned} a x_1 y_1 z_1 + b x_1 y_1 z_2 + c x_1 y_2 z_1 + d x_1 y_2 z_2 \\ + e x_2 y_1 z_1 + f x_2 y_1 z_2 + g x_2 y_2 z_1 + h x_2 y_2 z_2. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2, & y_1 &= \mu_1 y'_1 + \mu_2 y'_2, & z_1 &= \nu_1 z'_1 + \nu_2 z'_2, \\ x_2 &= \lambda'_1 x'_1 + \lambda'_2 x'_2, & y_2 &= \mu'_1 y'_1 + \mu'_2 y'_2, & z_2 &= \nu'_1 z'_1 + \nu'_2 z'_2. \end{aligned}$$

Faisant les substitutions, on obtient une fonction de la forme

$$a' x'_1 y'_1 z'_1 + b' x'_1 y'_1 z'_2 + \dots + h' x'_2 y'_2 z'_2.$$

Remplaçant dans u les lettres $a, b, c, \dots, h$ par $a', b', c', \dots, h'$, il vient

$$u' = (\lambda_1 \lambda'_2 + \lambda_2 \lambda'_1)^2 (\mu_1 \mu'_2 - \mu_2 \mu'_1)^2 (\nu_1 \nu'_2 - \nu_2 \nu'_1)^2 u.$$

En effet, changeant seulement z_1 et z_2 , on obtient, comme ci-dessus,

$$(\nu_1 \nu'_2 - \nu_2 \nu'_1)^2 u;$$

et changeant dans celle-ci γ_1 et γ_2 , il suffit de multiplier le résultat par $(\mu_1 \mu'_2 - \mu_2 \mu'_1)^2$, etc.