

E. LORIEUX

Théorème proposé au concours général de 1849

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 369-376

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_369_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_369_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

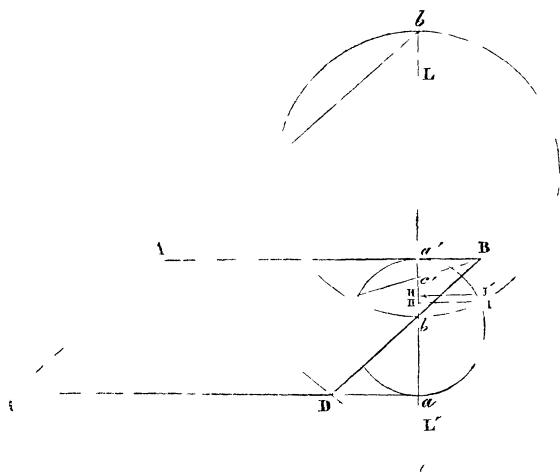
THEOREME PROPOSE AU CONCOURS GENERAL DE 1849

Mathématiques élémentaires (voir p. 313)

REDIGÉ PAR M. E. LORIEUX,
Élève du lycée Monge

Etant donné un parallélogramme $ABCD$, on mène une droite LL' perpendiculaire à ses deux côtés opposés AB , CD , laquelle rencontre le premier côté en a' , et le prolongement du second en a ; cette droite rencontre les deux autres côtés AC , BD en b' et b , et les deux diagonales BC , AD en c' et c .

On demande de prouver que les circonférences des cercles décrits sur les trois segments aa' , bb' , cc' , comme diamètres, ont les mêmes points d'intersection.



On pourra examiner si le théorème aurait encore lieu

dans le cas où la droite LL' serait oblique aux deux côtés AB, CD, au lieu de leur être perpendiculaire.

Construisons deux des cercles, par exemple ceux qui ont pour diamètres aa' et bb' . Soit I un de leurs points d'intersection. Abaissons de ce point sur $b'c$ la perpendiculaire IH. Dans le cercle $a'Ia$, $a'H \times aH = \overline{IH}^2$: dans le cercle $b'Ib$, $b'H \times bH = \overline{IH}^2$. Donc

$$a'H \times aH = b'H \times bH.$$

Or

$$b'H = b'a' + a'H, \quad \text{et} \quad bH = aH - ab$$

Remplaçons ces lignes par leurs valeurs dans l'équation précédente, nous aurons

$$\begin{aligned} a'H \times aH &= (b'a' + a'H) \times aH = ab + a'H \times aH \\ &= b'a' \times aH + a'H \times aH = b'a' \times ab + a'H \times ab, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en réduisant,

$$b'a' \times aH = b'a' \times ab + a'H \times ab$$

Mais $aH = aa' - a'H$ Substituant, il vient

$$b'a' (aa' - a'H) = b'a' \times ab + a'H \times ab,$$

ou bien

$$1) \quad a'H(ab + b'a') = b'a'(aa' - ab) = a'b' \times a'b.$$

Les triangles Dab, $a'bB$ sont semblables, puisque les lignes Aa' et CD sont parallèles. Ils donnent la proportion

$$ab : a'b :: Da : a'B$$

Par suite

$$\begin{aligned} aa' : ab :: Da + a'B : Da \\ : a'b : a'B, \end{aligned}$$

d'où

$$ab = \frac{aa' \times Da}{Da + a'B} \quad \text{et} \quad a'b = \frac{aa' \times a'B}{Da + a'B}$$

Les triangles semblables $b'Ca$ et $A'b'a'$ donnent

$$a'b' : b'a :: Aa' : Ca.$$

On a, par conséquent,

$$aa' : a'b' :: Ca - Aa' : Aa',$$

d'où

$$a'b' = \frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'}.$$

Remplaçons, dans l'équation (1), ab , $a'b'$ et $a'b$ par leurs valeurs

$$a'H \left(\frac{aa' \times Da}{Da + a'B} + \frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'} \right) = \left(\frac{aa' \times Aa'}{Ca - Aa'} \right) \left(\frac{aa' \times a'B}{Da + a'B} \right),$$

ou bien

$$\begin{aligned} & a'H [Da'Ca - Aa'] + Aa' (Da + a'B)] \\ &= a'A [aa' (Da + a'B) - aa' \times Da], \end{aligned}$$

ou bien encore

$$a'H (Da \times Ca + Aa' \times a'B) = aa' \times Aa' \times a'B,$$

d'où l'on tire

$$a'H = \frac{aa' \times Aa' \times a'B}{Da \times Ca + Aa' \times a'B}.$$

Traçons maintenant le cercle qui a cc' pour diamètre; soit I' un de ses points d'intersection avec le cercle dont le diamètre est aa' . Du point I' abaissons sur $b'c$ la perpendiculaire $I'H'$, et calculons $a'H'$ comme nous avons calculé $a'H$. Pour cela, nous remarquerons qu'en changeant b en c et b' en c' dans l'équation (1), nous avons l'équation

$$2) \quad a'H' (ac + a'c') = a'c' \times a'c.$$

Les triangles $a'C'B$, $c'Ca$ sont semblables, puisque les lignes AB et CD sont parallèles. Ils donnent la proportion

$$a'c' : c'a :: a'B : Ca,$$

d'où

$$aa' : ca' :: a'B + Ca : a'B, \quad \text{et} \quad a'e' = \frac{aa' \times a'B}{a'B + Ca}.$$

Les triangles semblables Dac , Aca' donnent

$$ca : ca' :: Da : Aa'.$$

Par suite

$$\begin{array}{ccc} aa' : ca :: Aa' - Da : Da \\ : ca' & & : Aa', \end{array}$$

d'où

$$ca = \frac{aa' \times Da}{Aa' - Da}, \quad \text{et} \quad ca' = \frac{aa' \times Aa'}{Aa' - Da}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$a'H' \left[\left(\frac{aa' \times Da}{Aa' - Da} \right) + \left(\frac{aa' \times Aa'}{a'B + Ca} \right) \right] = \left(\frac{aa' \times a'B}{a'B + Ca} \right) \left(\frac{aa' \times Aa'}{Aa' - Da} \right),$$

ou bien

$$a'H' [Da \cdot a'B + Ca] + a'B \cdot Aa' - Da^2 = aa' \cdot a'B \times Aa',$$

d'où l'on tire

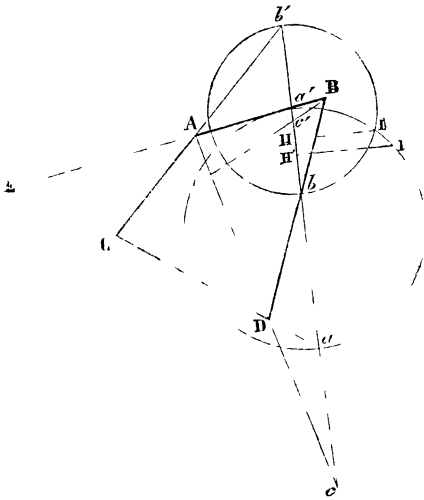
$$a'H' = \frac{aa' \times a'B \times Aa'}{Da \times Ca + a'B \times Aa'}.$$

C'est la valeur que nous avons trouvée pour $a'H$. Donc le point H' coïncide avec le point H . Mais les points I et I' d'intersection se trouvent à la fois sur la perpendiculaire élevée en ce point et sur le cercle dont le diamètre est aa' . Donc ces deux points coïncident aussi. Il en est de même pour les points situés de l'autre côté, qui sont symétriques.

Pour trouver les équations (1) et (2), nous n'avons fait aucune hypothèse, si ce n'est que sur trois segments quelconques d'une ligne comme diamètres, nous avons décrit trois cercles, et que des points d'intersection nous avons abaissé une perpendiculaire sur cette ligne. Pour obtenir les valeurs de $a'H$ et de $a'H'$, nous ne nous sommes servi que du parallélisme des côtés AB et CD , et nullement de

celui des deux côtés AC et BD, pas plus que de la perpendicularité de la ligne aa' sur les côtés AB, CD. Ces deux conditions de l'énoncé sont donc inutiles, et compliquent la question quand, suivant les règles de la méthode, on cherche à les faire entrer dans la démonstration. Il aurait fallu donner un trapèze ABCD et une sécante quelconque aa' .

Le parallélisme même des deux côtés AB, CD est-il une simplification? La démonstration n'est-elle pas aussi simple quand il s'agit d'un quadrilatère quelconque? Alors, en effet, tout se borne à considérer un seul triangle. Dans le cas d'un trapèze ou d'un parallélogramme, le sommet de ce triangle est à l'infini.



Soit ABCD un quadrilatère quelconque, et répétons les mêmes constructions. Soit E le point d'intersection des deux côtés AB et CD prolongés. Les équations (1) et (2) subsistent toujours. Il nous faut, comme précédem-

ment, calculer les lignes ab , $b'a'$ et $a'b$ pour obtenir la valeur de $a'H$. Au lieu des triangles semblables, nous prendrons ici les transversales BD et Cb' par rapport au triangle Eaa' . La première nous donne

$$(M) \quad ab \times a'B \times ED = EB \times ba' \times Da,$$

d'où

$$\frac{ab}{ab'} = \frac{BE \times Da}{a'B \times DE}.$$

Quand AB et CD sont parallèles, les segments BE , DE sont infinis et, par conséquent, égaux; il reste $\frac{ab}{a'b'} = \frac{Da}{a'B}$, ou la proportion que nous avaient donnée les triangles semblables Dab , $ab'B$. Nous poserons ce rapport égal à K . Ajoutons 1 aux deux membres, $\frac{ab + ba'}{ba'} = K + 1$.

Mais $ab + ba' = aa'$; donc

$$\frac{aa'}{ba'} = K + 1, \quad \text{et} \quad ba' = \frac{aa'}{K + 1}.$$

Nous avons aussi

$$ab = aa' - ba' = aa' - \frac{aa'}{K + 1} = \frac{aa' \cdot K}{K + 1}.$$

La transversale Cb' nous donne

$$(N) \quad a'b' \times AE \times Ca = b'a \times Aa' \times CE,$$

d'où

$$\frac{ab'}{a'b'} = \frac{Ca \times AE}{Aa' \times CH},$$

rapport que nous poserons égal à R . Retranchant 1 de part et d'autre, il vient

$$\frac{b'a - a'b'}{a'b'} = R - 1.$$

Mais $ab' - b'a' = aa'$; donc

$$\frac{aa'}{a'b'} = R - 1, \quad \text{et} \quad a'b' = \frac{aa'}{R - 1}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation (1), nous aurons

$$a'H \left(\frac{aa'.K}{K+1} + \frac{aa'}{R-1} \right) = \frac{\overline{aa'}^2}{(K+1)(R-1)}.$$

On peut diviser le tout par aa' et réduire cette équation, qui devient

$$a'H(K.R+1) = aa', \quad \text{d'où} \quad a'H = \frac{aa'}{K.R+1}.$$

Remplaçons K et R par leurs valeurs, et nous avons

$$a'H = \frac{aa' \times CE \times DE \times Aa' \times Ba'}{AE \times BE \times Ca \times Da + CE \times DE \times Aa' \times Ba'}.$$

Si nous prenons le cercle décrit sur cc' comme diamètre, les transversales AC et BC par rapport au même triangle Eaa' nous donneront deux équations qui correspondront, la première à l'équation (M), la seconde à l'équation (N). La transversale Ac nous donne

$$(M') \quad ac \times DE \times Aa' = ca' \times Da \times AE.$$

La transversale BC nous donne

$$(N') \quad a'c' \times aC \times BE = c'a \times CE \times Ba'$$

Nous avons en outre

$$ac' + c'a = aa' \quad \text{et} \quad a'c - ac = aa'.$$

Les équations (M') et (N') ne diffèrent des équations (M) et (N) que parce que B est changé en A et A en B . Tout étant du reste symétrique, la valeur de $a'H'$ ne différera de celle de $a'H$ que par ce seul changement. Mais, malgré ce changement, la valeur de $a'H$ reste la même; donc le point H' coïncide avec le point H , et les trois cercles ont les mêmes points d'intersection.

Nota. La question n'a pas été résolue au grand concours, et aucun prix décerné. Comme nous l'avons déjà observé en 1847 et 1848, la question élémentaire est plus

difficile que celle des mathématiques supérieures. D'ailleurs, pourquoi confisquer toute la science au bénéfice de la géométrie analytique? Pourquoi ne pas proposer à la classe supérieure des questions de géométrie supérieure, de géométrie de l'espace (*) ?

T_M.
