

Questions sur la numération

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 354-357

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_354_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_354_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS SUR LA NUMÉRATION (*).

1. PROBLÈME. *Trouver la somme des n premiers termes de la série dont le terme général est na^n ; a étant un nombre quelconque.*

Solution. Soit

$$S_{n+1} = a + 2a' + 3a'' + \dots + (n+1)a^{n+1},$$

$$S_{n+1} = a + 2a + 3a^2 + \dots + na^n,$$

d'où

$$S_{n+1} - S_{n+1} = (n+1)a^{n+1}.$$

Faisons

$$S_{n+1} = a^{n+1} (n\varphi a + \psi a) + C;$$

$\varphi(a)$ et $\psi(a)$ sont des fonctions à déterminer, et C une constante arbitraire; on aura

$$S_{n+2} = a^{n+2} [(n+1)\varphi(a) + \psi a] + C;$$

d'où

$$\begin{aligned} S_{n+2} - S_{n+1} \\ = a^{n+1} [n(a-1)\varphi a + a\varphi(a) + (a-1)\psi a] = a^{n+1}(n+1). \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$(a-1)\varphi a = 1; \quad a\varphi(a) + (a-1)\psi a = 1;$$

on en tire

$$\varphi(a) = \frac{1}{a-1}, \quad \psi(a) = \frac{-1}{(a-1)^2};$$

donc

$$S_{n+1} = \frac{a^{n+1} [n(a-1) - 1]}{(a-1)^2} + C.$$

(*) *Arithmétique* de M. J. Bertrand.

Supposons que pour $n = 0$, on ait

$$S_1 = 0,$$

alors

$$C = \frac{a}{(a-1)^2};$$

donc

$$S_{n+1} = \frac{a^{n+1} [n(a-1) - 1] + a}{(a-1)^2}$$

Observation. La solution *directe* se trouve par les méthodes du calcul aux *différences finies*. (Voir le précieux *Traité de Calcul différentiel* de LACROIX, tome III, page 138, 2^e édition; 1819.)

L'éloge de cet académicien, homme de bien, qui a rendu des services éclatants à la science et à l'enseignement, n'a pas encore été prononcé. Il en est de même pour l'illustre Legendre. Il est vrai que ces noms ne sont pas mêlés à nos discordes civiles; mais la gloire de ces noms est une richesse nationale. Pourquoi les frustrer d'un honneur qu'ils ont si bien mérité? Ayant égard à des circonstances impérieuses, l'Académie, dérogeant à ses statuts, pourrait charger un de ses membres d'acquitter une dette non sujette à prescription, et d'autant plus exigible, plus sacrée, qu'aucune réclamation ne peut venir d'outre-tombe. Il est triste qu'un citoyen obscur ait besoin d'élever sa voix dans une cause qui devrait compter publiquement pour avocats les Biot, les Cauchy et les Lamé.

2. PROBLÈME. Combien y a-t-il de chiffres dans la suite naturelle des nombres, depuis 1 jusqu'à $10^{n+1} - 1$?

Solution. Depuis 10^n jusqu'à $10^{n+1} - 1$, on rencontre $10^{n+1} - 10^n$ ou $9 \cdot 10^n$ nombres de $n+1$ chiffres; et, par conséquent, $9(n+1)10^n = 9n \cdot 10^n + 9 \cdot 10^n$ chiffres. Il

faut *sommer* depuis $n = 0$; dans le problème précédent, faisant $a = 10$, on obtient

$$\begin{aligned} 9S_{n+1} &= \frac{10^{n+1}(9n-1) + 10}{9}, \\ 9S \cdot 10^n &= 10^{n+1} - 1, \\ 9S_{n+1} - 9S \cdot 10^n &= n \cdot 10^{n+1} + \frac{8 \cdot 10^{n+1} + 1}{9} \\ &= (n+1)10^{n+1} - \frac{10^{n+1} - 1}{9}; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit cette règle :

Écrivez $n+1$ zéros à la droite du nombre $n+1$, et au-dessus de chaque zéro, écrivez l'unité; faites la soustraction; le reste est le nombre des chiffres cherché.

Exemple. Combien y a-t-il de chiffres depuis 1 jusqu'à 99999? Ici $n = 4$; écrivez 500000, retranchez 11111, et le reste 488889 est le nombre de chiffres demandé.

3. PROBLÈME. *Trouver le nombre des chiffres de la suite naturelle des nombres depuis 1 jusqu'au nombre quelconque N.*

Solution. N est compris entre 10^{n+1} et 10^{n+2} ; soit donc $N = 10^{n+1} + k$. Le nombre de chiffres de 1 à $10^{n+1} - 1$ est $(n+1)10^{n+1} - \frac{10^{n+1} - 1}{9}$ (problème précédent). Il existe $k+1$ nombres depuis 10^{n+1} jusqu'à $10^{n+1} + k$, chacun de $n+2$ chiffres; ainsi le nombre total des chiffres est

$$(n+1)10^{n+1} - \frac{10^{n+1} - 1}{9} + (k+1)(n+2).$$

4. PROBLÈME. *Écrivant tous les nombres de la suite naturelle, de droite à gauche, à la suite les uns des autres, on demande le chiffre qui occupe un rang désigné.*

Solution. Supposons qu'on demande le chiffre 1849^{ème}

à partir de la gauche, cherchons le nombre auquel ce chiffre appartient; à cet effet il faut, dans l'expression $(n+1)10^{n+1} - \frac{10^{n+1}-1}{9}$, donner à n une valeur telle, que l'expression approche le plus possible de 1849; cette valeur est $n=1$: donc le nombre dont le chiffre cherché fait partie est compris entre 99 et 999. Le premier 9 à droite de 999, occupe le 189^{ième} rang à partir de la gauche; il faut donc encore compter 1660 chiffres. Le produit $(k+1)(n+2)$ ou $3(k+1)$ égal le plus possible à 1660, on a $k=552$; ce qui donne $3(k+1)=1659$. Ainsi, le chiffre cherché est le premier à gauche de 1553, c'est-à-dire 1.

5. *Autrement.* On a l'identité

$$n + (n-1)(a-1) + (n-2)a(a-1) + (n-3)a^2(a-1) + (n-4)a^3(a-1) + \dots + a^{n-2}(a-1) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}.$$

Supposons qu'on demande tous les chiffres de la suite naturelle depuis 1 jusqu'à 99999. Si tous ces nombres avaient cinq chiffres, on aurait 5.99999 ou 500000 — 5 chiffres.

Les nombres d'un seul chiffre donnent de trop. 4.9 chiffres:

Les nombres de deux chiffres 3.9.10

Les nombres de trois chiffres 2.9.10²

Les nombres de quatre chiffres 1.9.10³

On a donc de trop, sur 500000,

$$5 + 4.9 + 3.9.10 + 2.9.10^2 + 1.9.10^3 = 11111;$$

d'après l'identité, en faisant $n=5$ et $a=10$; donc le nombre de chiffres est 500000 — 11111 = 488889, comme on trouve par la règle de ci-dessus.