

Nouvelle démonstration et généralisation du théorème binomial d'après M. G. Eisenstein

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8 (1849), p. 344-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__344_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOUVELLE DÉMONSTRATION ET GÉNÉRALISATION DU
THÉORÈME BINOMIAL ;**

D'APRÈS M. G. EISENSTEIN,

Etudiant (student) à Berlin.

(Journal de M. Crelle, t. XXVIII, p. 44, 1844 ; en allemand.)

Lemme. m et n étant deux nombres positifs entiers, l'expression

$$\frac{p^m - 1}{p^n - 1}$$

se réduit à $\frac{m}{n}$ lorsque $p = 1$.

Soit l'expression

$$(1) \quad \varphi(x, \alpha) = (1+x)(1+px)(1+p^2x) \dots (1+p^{\alpha-1}x).$$

Elle satisfait évidemment à la relation

$$(2) \quad (1+p^\alpha x) \varphi(x, \alpha) = (1+x) \varphi(px, \alpha);$$

$\varphi(x, \alpha)$ étant une fonction entière de degré α de x , on a

$$(3) \quad \varphi(x, \alpha) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_\alpha x^\alpha.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients. D'abord $A_0 = 1$; ensuite, si l'on met les séries correspondantes à $\varphi(x)$ et $\varphi(px)$ dans la relation (2), on obtient

$$(1+p^\alpha x) \sum_{t=0}^{t=\alpha} A_t x^t = (1+x) \sum_{t=0}^{t=\alpha} p^t x^t;$$

et égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, il vient

$$A_t + p^\alpha A_{t-\alpha} = A_t p^t + A_{t-1} p^{t-1};$$

d'où

$$(4) \quad A_t = \frac{p^\alpha - p^{t-1}}{p^t - 1} A_{t-1};$$

par conséquent,

$$A_t = \frac{p^\alpha - p^{t-1}}{p^t - 1} \cdot \frac{p^\alpha - p^{t-2}}{p^{t-1} - 1} \cdots \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot A_0.$$

Si l'on considère que $A_0 = 1$ et que

$$1 + 2 + 3 + \dots + t - 1 = \frac{1}{2} t(t-1),$$

on peut écrire

$$(5) \quad A_t = \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot \frac{p^{\alpha-1} - 1}{p^2 - 1} \cdots \frac{p^{\alpha-t+1} - 1}{p^t - 1} \cdot p^{\frac{1}{2} t(t-1)};$$

ainsi, l'on obtient

$$(6) \quad \begin{cases} (1+x)(1+px) \cdots (1+p^{\alpha-1}x) \\ = \sum_{t=0}^{t=\alpha} A_t x^t = \sum_{t=0}^{t=\alpha} \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot \frac{p^{\alpha-1} - 1}{p^2 - 1} \cdots p^{\frac{1}{2} t(t-1)} x^t. \end{cases}$$

Faisant $p = 1$, le premier membre devient $(1+x)^\alpha$, tandis que le coefficient général A_t , d'après le lemme, est

$$\frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\alpha-2}{3} \cdots \frac{(\alpha-t+1)}{t};$$

donc

$$(7) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots x^\alpha.$$

On voit, par cet exemple, combien il est convenable de considérer les expressions comme des *cas particuliers* d'autres cas plus *généraux*. Par l'introduction de la nouvelle variable p , il a été possible d'établir la relation (2), laquelle, pour le cas spécial $p = 1$, ne donne qu'une identité.

Les coefficients A_i , qui sont d'erechef de la forme $\varphi(x)$, jouissent des mêmes propriétés que les coefficients binomiaux, et les renferment, comme on a vu, comme cas particuliers.

Soient α et β deux nombres entiers positifs, on a la relation

$$\varphi(x, \alpha + \beta) = \varphi(x, \alpha) \varphi(p^\alpha x, \beta);$$

en effet,

$$\begin{aligned} & (1+x)(1+px)\dots(1+p^{\alpha+\beta-1}x) \\ &= [(1+x)(1+px)\dots(1+p^{\alpha-1}x)] \\ & \times [(1+p^\alpha x)(1+p \cdot p^\alpha x)\dots(1+p^{\beta-1} p^\alpha x)]. \end{aligned}$$

Si l'on remplace les trois fonctions φ par leurs valeurs en série déduites de (6), et comparant les coefficients, on obtient

$$(8) \quad C_i = A_i + A_{i-1} B_1 p^\alpha + A_{i-2} B_1 p^{2\alpha} + \dots + B_i p^{i\alpha};$$

B_i et C_i sont ce que devient A_i en y remplaçant successivement α par β et $\alpha + \beta$.

Si dans l'équation (8) on pose partout $p^\alpha = u$ et $p^\beta = v$, les deux membres deviennent des fonctions entières de u et de v , et α et β n'apparaissent plus, si ce n'est *implicitement* dans u et v . Faisant passer tous les termes dans un seul membre, on a une fonction *entière* de u et de v qui *disparaît* pour un nombre *infini* de valeurs des deux variables (correspondantes aux valeurs positives de α et β); aussi cette fonction doit s'annuler *identiquement*, c'est-à-dire pour toute valeur de u et de v (*). Ainsi l'existence de la formule (8) est démontrée pour chaque valeur de α et β . En généralisant l'expression de $\varphi(x, \alpha)$, et

(*) Il suffit même, pour qu'une fonction entière disparaisse, qu'elle s'annule pour un nombre de valeurs des variables surpassant d'une unité le degré de la fonction.

désignant par ce symbole la série $\sum_{t=0}^{\infty} A_t x^t$, pour une valeur quelconque de α (lorsque la série est convergente), alors il suit, en remontant, que la relation

$$(9) \quad \varphi(x, \alpha + \beta) = \varphi(x, \alpha) \varphi(p^\alpha x, \beta)$$

n'existe pas seulement pour des valeurs entières, mais aussi pour des valeurs quelconques de α et β , et de là, en posant $p = 1$, on conclut que la série

$$1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha.\alpha-1.\alpha-2}{1.2.3} x^3 + \dots = \psi(\alpha)$$

satisfait, pour des valeurs quelconques de α et φ , à la relation

$$(10) \quad \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) \psi(\beta).$$

Au moyen des propositions connues, cette relation donne la démonstration du *théorème binomial général* pour des exposants quelconques.