

CAMILLO MINARELLI

Théorie des parallèles

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 312-314

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__312_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__312_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES PARALLÈLES;

PAR M. CAMILLO MINARELLI (**).

1. *Lemme.* La somme des trois angles d'un triangle ne peut jamais surpasser deux angles droits.

Démonstration. Legendre a donné une démonstration rigoureuse, aujourd'hui bien connue, dès la première édition de sa *Géométrie*.

Corollaire. La somme des quatre angles d'un quadrilatère ne peut dépasser quatre angles droits.

2. *Lemme.* Étant donné un trapèze ABCD, rectangle en A et B, si $AD > BC$, l'angle en D est aigu.

Démonstration. Prolongeons BC jusqu'en E, de manière que l'on ait $BC + CE = AD$, et menons DE; les deux angles ADE, DEB sont évidemment égaux, et, par conséquent, non obtus, d'après le corollaire précédent; donc, à plus forte raison, $ADC < ADE$ est aigu. C. Q. F. D.

(*) Pour les hebraisants : *Aschre baal hamispar lo kore bsphorim; ha kol jmtsa.*

(**) Communiquée par M. Angelo Genocchi, de Turin.

3. *Lemme.* Une des trois hauteurs d'un triangle tombe dans l'intérieur du triangle.

Démonstration. Tout triangle a au moins deux angles aigus; par conséquent, la hauteur qui part du sommet du troisième angle tombe dans l'intérieur.

4. *Lemme.* La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Démonstration. Soit ABC (*fig. 18, Pl. II*) un triangle donné, et BE la hauteur qui tombe dans l'intérieur. Prolongeons la base AC , et construisons une suite indéfinie de triangles CB_1C_1 , $C_1B_2C_2$, $C_2B_3C_3$, etc., égaux au triangle ABC ; de sorte que l'on ait $AC = CC_1$, $CB_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, et ainsi des autres. En A , élevons à AC une perpendiculaire $AD > BE$, et en D une perpendiculaire DK à AD ; menant DB , l'angle ADB est aigu (lemme 2); de même, si l'on menait DB_1 , DB_2 , etc.; donc la droite DK ne peut entrer dans aucun des triangles ABC , CB_1C_1 , $C_1B_2C_2$, etc. Joignons les sommets B , B_1 , B_2 , etc., par des droites BB_1 , B_1B_2 , etc. Prenons sur la droite DK des points quelconques D_1 , D_2 , D_3 , etc. (*), menons D_1B , D_1B_1 , D_2B_1 , D_2B_2 , etc. Cela posé, représentons par R l'angle droit, et supposons que la somme des trois angles du triangle ABC soit égale à $2R - \delta$; le pentagone ADD_1B_1C renferme cinq triangles ABD , DBD_1 , BD_1B_1 , BCB_1 , ABC ; la somme des quinze angles de ces triangles ne peut dépasser $10R - \delta$ (lemme 1). Les angles autour de B valent quatre droits; donc la somme des cinq angles du pentagone C ne peut dépasser $6R - \delta$.

Considérons maintenant le pentagone $ADD_2B_2C_1$; ajoutons aux angles du premier pentagone ceux du triangle CB_1C_1 , et ensuite ceux des triangles $D_1B_1D_2$, $B_1D_2B_2$,

(*) On peut prendre pour D_1 , D_2 , etc., les pieds des perpendiculaires abaissées de B , B_1 , etc., sur DK .

$B_1C_1B_2$, la somme totale sera moindre que $14R - 2\delta$; mais les angles en D_1 , en B_1 et en C valent ensemble $8R$, donc la somme des cinq angles du second pentagone est inférieure à $6R - 2\delta$. On démontrera de même que la somme des angles du troisième pentagone $ADD_2B_3C_2$ est moindre que $6R - 3\delta$; et pour le $n^{ième}$ pentagone, la somme des angles sera moindre que $6R - n\delta$. Or n croissant, $n\delta$ finira par surpasser $6R$, et, par conséquent, on parviendrait à un pentagone dont la somme des angles serait négative; résultat absurde; donc δ est nul, et la somme des angles du triangle ABC est égale à deux droits. C. Q. F. D.

5. THÉORÈME. *Deux droites parallèles étant coupées par une sécante, les angles alternes-internes sont égaux.*

Démonstration. Elle est fondée sur le lemme précédent. Consultez les premières éditions de la *Géométrie* de Legendre •