

LEMOINE

Théorème de Möbius. Sur la conique déterminée par cinq points sur un plan

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8 (1849), p. 298-299

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_298_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE MÖBIUS. SUR LA CONIQUE DÉTERMINÉE PAR CINQ POINTS SUR UN PLAN

(Voir t. VII, p. 106 et 177.)

PAR M. LEMOINE,
Professeur à Nantes.

Quelque simple que soit la solution donnée par M. Jules Lescurre (t. VII, p. 177), la suivante, je crois, l'est encore plus.

Soient $F = 0$, $F_1 = 0$ les équations des deux paraboles. L'équation générale de toutes les coniques qui passent par les mêmes points sera

$$F + \lambda F_1 = 0.$$

Dans le polynôme F comme dans le polynôme F_1 les

termes du second degré, les axes étant d'ailleurs quelconques, doivent former un carré parfait, on aura $F > 0$ pour tout point extérieur à la première parabole, et $F < 0$ pour tout point intérieur. Il en sera de même à l'égard de la seconde. Désignons par α et β les coordonnées du cinquième point, le coefficient λ sera déterminé par la condition

$$F(\alpha, \beta) + \lambda F_1(\alpha, \beta) = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{F(\alpha, \beta)}{F_1(\alpha, \beta)}.$$

En sorte que λ sera négatif si le cinquième point est à la fois intérieur ou extérieur aux deux paraboles, et il sera positif dans le cas contraire. Or

$$F = (ay + bx)^2 + cy + dx + f = 0,$$

$$F_1 = (a'y + b'x)^2 + c'y + d'x + f' = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} F + \lambda F_1 &= (ay + bx)^2 + \lambda(a'y + b'x)^2 \\ &+ (c + \lambda c')y + (d + \lambda d')x + f + \lambda f' \\ &= (a^2 + a'^2\lambda)y^2 + 2(ab + a'b'\lambda)xy + (b^2 + b'^2\lambda)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(B^2 - 4AC) &= (ab + a'b'\lambda)^2 - (a^2 + a'^2\lambda)(b^2 + b'^2\lambda) \\ &= -(a^2b'^2 + a'^2b^2 - 2abcb'\lambda) = -(ab' - ba')^2 \cdot \lambda. \end{aligned}$$

La conique sera donc une hyperbole si λ est négatif, et une ellipse si λ est positif. Le théorème est démontré.