

Note sur l'angle droit circonscrit à deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 282-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__282_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'ANGLE DROIT CIRCONSCRIT A DEUX CONIQUES.

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x + F = 0, \\ & A' y^2 + B' x y + C' x^2 + D' y + E' x + F' = 0, \end{aligned}$$

équations de deux coniques, axes rectangulaires;

$$y + e x + f = 0, \text{ tangente à la première conique,}$$

$$y + e' x + f' = 0, \text{ tangente à la deuxième conique.}$$

Posons

$$P = m x^2 - 2 k x + l, \quad P' = \mu y^2 - 2 \pi' y + \lambda',$$

$$Q = k y + k' x + n - m x y, \quad Q' = \pi y + \pi' x + \nu - \mu x y,$$

$$R = m y^2 - 2 k' y + l', \quad R' = \mu x^2 - 2 \pi x + \lambda,$$

$$L = A E^2 - B D E + C D^2 + F (B^2 - 4 A C),$$

$$k = \frac{dL}{dE}, \quad k' = \frac{dL}{dD}, \quad l = \frac{dL}{dC}, \quad l' = \frac{dL}{dA},$$

$$n = -\frac{dL}{dB}, \quad m = \frac{dL}{dF};$$

les lettres grecques sont relatives à la seconde conique.

Représentons par x et y les coordonnées du point d'intersection des deux tangentes; on a les deux équations de condition qui établissent le contact

$$(1) \quad \begin{cases} P e^2 - 2 Q e + R = 0, \\ R' e'^2 - 2 Q' e' + P' = 0. \end{cases}$$

Les tangentes formant un angle droit, on a

$$ec' + 1 = 0;$$

donc la dernière équation devient

$$(2) \quad P'e^2 + 2Q'e + R' = 0.$$

Éliminant e , on obtient

$$(3) \quad (RP' - PR')^2 + 4(RQ' + QR')(PQ' + QP') = 0.$$

Le terme le plus élevé de l'équation est $m^2\mu^2(y^2 + x^2)^4$; donc si l'équation n'a pas de facteur rationnel, le lieu géométrique du point d'intersection est toujours du huitième degré, à moins que l'une des coniques ne soit une parabole; car alors m ou μ est nul, et l'équation n'est plus que du sixième degré. Si les deux coniques sont des paraboles, l'équation s'abaisse au quatrième degré. Si l'équation a un facteur rationnel du deuxième degré, il doit être de la forme $A(y^2 + x^2) + \text{etc.}$; donc le lieu géométrique n'admet d'autres coniques que le cercle.

Lorsque les deux coniques se confondent, on a

$$P' = R, \quad Q' = Q, \quad R' = P,$$

et l'équation (3) devient

$$(R + P)^2 [(R - P)^2 + 4Q^2] = 0;$$

d'où

$$R + P = 0,$$

équation du cercle : théorème déjà connu de Pappus.

Éliminant e entre les deux équations (1) et (3), on obtient

$$e^2(PQ' + P'Q + RQ' + R'Q) = 0.$$

Si l'on a l'identité

$$PQ' + P'Q = RQ' + R'Q,$$

alors le lieu a pour équation

$$PQ' + P'Q = 0;$$

l'identité donne celle-ci,

$$Q'(P - R) = Q(R' - P).$$

Pour qu'elle subsiste, il faut que k, k', π, π', n, ν deviennent nuls, et que $\frac{l-l'}{m} = \frac{\lambda-\lambda'}{\mu}$, c'est-à-dire il faut que les deux coniques soient homofocales, et le lieu devient

$$m\mu(x^2 + y^2) + l\nu + m\lambda' = 0,$$

équation d'un cercle concentrique aux coniques.

L'équation $RP' - PR' = 0$ amène au même résultat; de même, $RQ' + QR' = 0$.
