

E. LIONNET

Note sur les approximations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 266-271

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__266_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. E. LIONNET,
Professeur au lycée Descartes (*).

1. *Étant donnée une limite δ des erreurs commises sur les facteurs d'un produit $abc...kl$, trouver une limite de l'erreur e commise sur le produit.*

Soient $a', b', c',$ etc., des valeurs de $a, b, c,$ etc., approchées par défaut à moins de δ . En remplaçant a par a' , on a diminué le facteur a d'un nombre moindre que δ , et le produit $abc...kl$ d'un nombre moindre que $\delta bc...kl$; pareillement, en remplaçant b par b' dans le produit $a'bc...kl$, on a diminué ce produit d'un nombre moindre que $\delta a'c...kl$, et, à plus forte raison, d'un nombre moindre que $\delta ac...kl$; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'en remplaçant l par l' dans le produit $a'b'c'...kl$, on ait diminué ce produit d'un nombre moindre que $\delta ab...k$. Donc, en définitive, on aura $e < \delta s_{n-1}$, s_{n-1} désignant

(*) Voyez, pour plus de détails, les Compléments d'arithmétique, livre VI.

la somme des produits $n - 1$ à $n - 1$ des n facteurs $a, b, c, \dots, k, l$.

En général, si l'on désigne par p le produit des facteurs non modifiés, et par n le nombre des facteurs modifiés tous par défaut, tous par excès, ou les uns par défaut et les autres par excès, des raisonnements semblables conduiront à la relation

$$e < \delta p s_{n-1},$$

dans laquelle s_{n-1} représente la somme des produits $n - 1$ à $n - 1$ des facteurs modifiés, chaque facteur modifié par voie d'augmentation étant remplacé par sa valeur approchée par excès.

II. *Étant donnée une limite δ de l'erreur commise sur un nombre a , trouver une limite de l'erreur commise sur la racine $m^{\text{ème}}$ de ce nombre.*

Soit α une valeur de a approchée par excès à moins de δ . En remplaçant a par α dans $\sqrt[m]{a}$, l'erreur e commise sur cette racine est $\sqrt[m]{\alpha} - \sqrt[m]{a} = x - y$, en posant $\sqrt[m]{\alpha} = x$ et $\sqrt[m]{a} = y$. Or on a

$$e = x - y = \frac{(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \dots + y^{m-1})(x - y)}{x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \dots + y^{m-1}},$$

ou

$$e = \frac{x^m - y^m}{x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \dots + y^{m-1}}.$$

De plus, le dividende $x^m - y^m = \alpha - a < \delta$, et la relation $\alpha > a$ donne

$$\sqrt[m]{\alpha} > \sqrt[m]{a}, \quad \text{ou} \quad x > y;$$

donc en remplaçant x par y au diviseur, qui devient alors $y^{m-1} + y^{m-1} + y^{m-1} + \dots$, ou my^{m-1} , on diminuera ce

diviseur, et on aura

$$e < \frac{\delta}{m \gamma^{m-1}},$$

ou

$$(1) \quad e < \frac{\delta}{m \sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

En désignant par α une valeur de a approchée par défaut à moins de δ , des raisonnements semblables conduisent à la relation

$$(2) \quad e < \frac{\delta}{m \sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}.$$

Corollaire. Les relations (1) et (2) montrent que si a est un nombre décimal plus grand que l'unité et que $\delta = \frac{1}{10^n}$, on aura $e < \frac{1}{10^n}$; donc, pour obtenir la racine $m^{\text{ème}}$ d'un nombre décimal plus grand que l'unité, à moins d'une unité décimale du $n^{\text{ème}}$ ordre, il suffit d'opérer sur une valeur du nombre proposé, approchée à moins de la même unité décimale. Ce principe peut d'ailleurs être considéré comme une conséquence de celui que nous allons démontrer.

III. Pour extraire la racine $m^{\text{ème}}$ d'un nombre entier a avec une erreur moindre que l'unité, il suffit de connaître plus de la $m^{\text{ème}}$ partie du nombre de ses chiffres à partir de la gauche.

En supposant que m soit le nombre des chiffres de a , nous démontrerons d'abord que si l'on prend sur la gauche de a un nombre de chiffres plus grand que $\frac{n}{m}$, ou au moins égal à $\frac{n+1}{m}$, en remplaçant tous les chiffres suivants par des zéros, l'erreur e commise sur $\sqrt[m]{a}$ sera

moindre qu'une unité. En effet, le nombre α qu'on substitue à a dans $\sqrt[m]{a}$ contenant n chiffres est au moins égal à 10^{n-1} ; de plus, le nombre des chiffres pris sur la gauche de n étant au moins égal à $\frac{n+1}{m}$, la partie négligée contient au plus $n - \frac{n+1}{m}$ ou $\frac{n(m-1)-1}{m}$ chiffres; donc cette partie est moindre que $10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}$. Or on a la relation

$$e < \frac{\delta}{m \sqrt[m]{\alpha^{m-1}}}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{\delta}{m \alpha^{\frac{m-1}{m}}} \quad (\text{II}),$$

dans laquelle e désigne l'erreur commise sur $\sqrt[m]{a}$ en remplaçant a par une valeur α approchée par défaut à moins de δ ; donc si l'on fait $\delta = 10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}$ et $\alpha = 10^{n-1}$, on aura, à plus forte raison,

$$e < \frac{10^{\frac{n(m-1)-1}{m}}}{m \times 10^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}}, \quad \text{ou} \quad e < \frac{10^{\frac{m-2}{m}}}{m}.$$

Remplaçant m successivement par chacun des nombres

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on voit immédiatement que $10^{\frac{m-2}{m}}$ est moindre que m ; il en est de même pour une valeur

quelconque de m supérieure à 9, puisque $10^{\frac{m-2}{m}}$ est constamment moindre que 10; donc, quel que soit le degré m de la racine à extraire, on aura $e < 1$. Il en résulte que pour extraire la racine m^{ieme} d'un nombre entier composé de n chiffres, avec une erreur moindre qu'une

unité, il suffit de prendre sur la gauche de ce nombre au moins $\frac{n+1}{m}$ chiffres, en remplaçant tous les autres par des zéros, puis d'extraire la racine $m^{\text{ième}}$ du nombre ainsi obtenu par excès, à moins d'une unité. Ainsi, par exemple, pour extraire la racine $12^{\text{ième}}$ d'un nombre de 23 chiffres, avec une erreur moindre qu'une unité, il suffira de connaître ses deux premiers chiffres à gauche.

IV. *Trouver, avec une erreur moindre qu'un millimètre,*
 1° le diamètre d'un cercle dont l'aire est un mètre carré;
 2° le diamètre d'une sphère dont le volume est un mètre cube.

Prenons le mètre pour unité de longueur, le mètre carré pour unité de surface, le mètre cube pour unité de volume, et désignons par x la mesure du diamètre demandé.

1°. On détermine la valeur de x par l'égalité

$$\frac{1}{4} \pi x^2 = 1, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{4}{\pi}};$$

de sorte qu'il s'agira d'extraire à moins d'un millième la racine carrée du quotient de la division de 4 par π ; or ce quotient est plus grand que l'unité, donc il suffit d'en obtenir une valeur approchée à moins d'un millième (II, cor.), c'est-à-dire de calculer sa partie entière et ses trois premières décimales. La division abrégée de Fourier donne immédiatement $\frac{4}{\pi} = 1,273$ etc., et en extrayant la racine carrée de 1,273 par excès à moins d'un millième, on a $x = 1,129$ avec une erreur moindre qu'un millième.

2°. On détermine x par l'égalité

$$\frac{1}{6} \pi x^3 = 1, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

Le quotient $\frac{6}{\pi}$ étant plus grand que l'unité, on détermine ses quatre premiers chiffres à gauche 1, 9, 0, 9 par la division abrégée de Fourier, et en extrayant la racine cubique de 1,909 par excès à moins d'un millième, on aura $x = 1,241$ avec une erreur moindre qu'un millième.

La solution de ces problèmes fait ressortir l'utilité de la *division ordonnée* de Fourier combinée avec la règle donnée précédemment pour l'extraction des racines par approximation.