

STERN

Trois théorèmes arithmologiques de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 250-252

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__250_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TROIS THÉORÈMES ARITHMOLOGIQUES DE M. STEINER,

Démontrés par M. STERN.

(Journal de M. Crelle, t. XIV, p. 76, 1835.)

THÉORÈME I. Prenant tous les nombres entiers depuis 2 jusqu'à l'infini, et élevant chacun à toutes les puissances négatives, depuis la deuxième jusqu'à l'infini, la somme est égale à l'unité.

Démonstration. On a

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \dots$$

Faisant successivement $a = 2, 3, 4, \dots, \infty$, le second membre donne toutes les puissances négatives des nombres entiers, et le premier membre devient successivement

$$1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots;$$

dont la somme est égale à l'unité. Ce qu'il fallait démontrer.

Observation. On a aussi

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^5} + \dots$$

Faisant successivement $a = 2, 3, 4, \dots, \infty$ et ajoutant les équations, on conclut que la somme des puissances négatives paires des nombres entiers (l'unité exclue), moins la somme des puissances impaires, est égale à $\frac{1}{2}$; donc les

sommes des puissances négatives paires $= \frac{3}{4}$, et les puissances négatives impaires $= \frac{1}{4}$.

Legendre, dans ses *Exercices du calcul intégral*, donne une Table des sommes des puissances négatives, jusqu'à la trente-cinquième, avec seize décimales (part. IV, sect. 1, p. 65). D'après cette Table, la somme des puissances négatives paires, depuis la deuxième jusqu'à la trente-quatrième inclusivement $= 0,74999999998$; ainsi la somme des puissances négatives restantes est moindre que $0,00000000002$; de même la somme des puissances négatives impaires depuis la troisième jusqu'à la trente-cinquième inclusivement $= 0,24999999998$; ainsi la somme des puissances impaires restantes est moindre que $0,00000000001$.

THÉORÈME II. *La somme de toutes les fractions de la forme $\frac{1}{(2+x)^{2+\gamma}-1}$ est $= 1$, en donnant à x et γ toutes les valeurs entières positives de 0 à ∞ , et ne prenant qu'une fois les fractions qui se reproduisent plusieurs fois.*

Démonstration.

$$\frac{1}{(2+x)^{2+\gamma}-1} = \frac{1}{(2+x)^{2+\gamma}} + \frac{1}{(2+x)^{4+2\gamma}} + \frac{1}{(2+x)^{6+3\gamma}} + \dots$$

Donnant à x et à γ toutes les valeurs positives entières depuis 0 jusqu'à l'infini; prenant pour $2+x$ d'abord les nombres qui ne sont puissances d'aucun nombre; ensuite les nombres qui ne sont que des carrés et non des puissances supérieures; puis les nombres qui ne sont que des cubes et non des puissances supérieures, etc.; la somme totale renfermera donc la somme de toutes les puissances négatives, et on rentre dans le théorème I.

THÉORÈME III.

$$\sum \frac{(2+x)^{-(2+\gamma)}}{(2+x)^{2+\gamma}-1} = \sum (2+x)^{-(2+\gamma)},$$

en donnant à x et y toutes les valeurs positives de 0 à ∞ avec ces restrictions, $2 + y$ ne doit pas être une puissance supérieure d'un nombre, et $2 + x$ doit être une puissance supérieure d'un nombre.

Démonstration. Cette expression

$$= \frac{1}{[(2+x)^2]^{2+y}} + \frac{1}{[(2+x)^3]^{2+y}} + \dots$$

et $2 + y$ ne devant pas être une puissance supérieure d'un nombre, il s'ensuit que cette expression est la somme de toutes les puissances négatives, à partir de la seconde, de tous les nombres qui sont une puissance supérieure d'un nombre (*).
