

E. DOULIOT

Troisième solution de la question 201

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 248-250

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__248_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 201

(Voir p. 206 et 208),

PAR M. E. DOULIOT,

Élève du lycée Monge, classe de M. Vincent.

1. *Lemme.* Etant donné un parallélogramme ABDE, si par un point C, pris sur la diagonale DA, ou sur son prolongement, on mène une droite qui coupe en N et T les côtés adjacents AB, DB, et en N' et T' les côtés EA, ED, on aura

$$CN \cdot CT = CN' \cdot CT' \quad (\text{fig. 17, Pl. II});$$

et réciproquement, si sur la transversale II' l'on a

$$CN \cdot CT = CN' \cdot CT',$$

le point C est sur la diagonale.

Démonstration. Les deux triangles ACN, DCT' étant semblables, on a

$$CN : CT' :: CA : CD$$

De même, les deux triangles ACN' , DCT étant semblables, on a

$$CN' : CT :: CA : CD ;$$

donc

$$CN.CT = CN'.CT'.$$

Remarque. Le point C sera toujours compris entre deux nombres paires de points d'intersections; ceci est évident, quand le point C est intérieur au parallélogramme. Si le point C est extérieur, en faisant tourner la droite autour du point C , de manière à éloigner le point T' , on voit que dès qu'elle sera parallèle à DE elle le sera aussi AB ; elle ne peut donc pas rencontrer une de ces droites dans le sens de CT , et l'autre dans le sens de CT' . Donc le point C sera en dehors des quatre points d'intersections, ou il en aura deux de chaque côté.

La réciproque se démontre par la réduction à l'absurde.

2. THÉORÈME. (*Fig. 18, Pl. II.*) Soient P, P' deux points appartenant respectivement à deux ellipses homofocales, tels, que les tangentes menées à ces courbes en P et P' se coupent à angle droit; en désignant par I le point de leur intersection, et par C le centre commun des ellipses, la droite CI divisera en deux parties égales la distance PP' .

STREBOR.

Démonstration. Je mène les normales $PK, P'K$; la figure $PKP'I$ est un rectangle, et le théorème sera démontré si l'on prouve que le point C est sur la diagonale IK . Soient N, N', T, T' les points où les normales et les tangentes rencontrent l'axe, on a

$$C^2 = CN.CT \quad \text{et} \quad C^2 = CN'.CT';$$

donc

$$CN.CT = CN'.CT'.$$

Donc, en vertu du lemme, le point C est sur la diagonale.

Comme on s'est appuyé sur une propriété commune à l'ellipse et à l'hyperbole , et dans laquelle les tangentes et les normales entrent d'une manière symétrique , on voit que le théorème est applicable à deux coniques homofocales quelconques.
