

GUILMIN

Note sur les équations qui ont des racines en progression

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8 (1849), p. 242-246

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8_242_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LES ÉQUATIONS QUI ONT DES RACINES EN
PROGRESSION;**

PAR M. GUILMIN.

1^{er} Cas. L'équation proposée a toutes ses racines en progression géométrique.

Soit

$$1) \quad f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots = 0,$$

l'équation proposée, et soient $a, aq, aq^2, aq^3, \dots aq^{m-1}$ ses m racines.

On voit facilement que

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = 0,$$

et, par suite .

$$f\left(\frac{x}{q}\right) - f(x) = 0$$

ont $m-1$ racines $aq, aq^2, aq^3, \dots aq^{m-1}$ communes avec la proposée.

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{x^m}{q^m} + A_1 \frac{x^{m-1}}{q^{m-1}} + A_2 \frac{x^{m-2}}{q^{m-2}} + \dots = 0.$$

Nous substituons à cette équation celle-ci

$$(2) \quad x^m + A_1 q x^{m-1} + A_2 q^2 x^{m-2} + A_3 q^3 x^{m-3} + \dots = 0.$$

Retranchant (1) de (2), nous avons

$$A_1 (q-1) x^{m-1} + A_2 (q^2-1) x^{m-2} + A_3 (q^3-1) x^{m-3} + \dots = 0,$$

ou bien, sauf le cas de $q=1$,

$$(3) \quad A_1 x^{m-1} + A_2 (q+1) x^{m-2} + A_3 (q^2+q+1) x^{m-3} + \dots = 0,$$

laquelle a pour racines $aq, aq^2, aq^3, \dots aq^{m-1}$.

La somme de ces racines est égale à celle des racines de (1), moins la racine a . On déduit de là l'égalité

$$-\frac{A_1 (q+1)}{A_1} = -A_1 - a,$$

ou

$$(4) \quad A_2 (q+1) = A_1 + A_1 a;$$

équation du premier degré en a et q .

La somme des produits des racines de l'équation (3), multipliées deux à deux, est égale à la somme des produits analogues des racines de l'équation (1), moins ceux de ces derniers produits qui renferment le facteur a . c'est-à-dire moins

$$a(aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{m-1}) = a(-A_1 - a)$$

Cette remarque conduit à l'égalité

$$\frac{A_2 (q^2 + q + 1)}{A_1} = A_2 - a(-A_1 - a),$$

ou

$$(\beta) \quad A_1(q' + q + 1) = A_1(A_2 + A_1a + a^2),$$

équation du second degré en a et q .

Quand on élimine a entre ces équations, on trouve une équation du second degré en q ; le produit des deux racines est 1, ce qu'on pouvait prévoir à priori.

Dans l'application, il vaut mieux substituer les coefficients A_1, A_2, A_3 dans les équations (α) et (β) , puis éliminer entre les équations numériques.

Si q est donné, l'équation (α) donne a très-simplement.

2^e Cas. L'équation donnée (1) a seulement n racines en progression géométrique.

Alors les équations (1) et (2), ou bien les équations (1) et (3) ont $n - 1$ racines communes. On cherchera le plus grand commun diviseur du degré $n - 1$ qui existe entre leurs premiers membres; ce diviseur trouvé, on l'égalera à zéro. On aura ainsi une équation du degré $n - 1$ qui aura toutes ses racines en progression géométrique, et qu'on pourra résoudre complètement en appliquant ce qui précède.

Les racines $aq, aq^2, \dots aq^{n-1}$ étant trouvées, on aura a en divisant la plus petite racine trouvée par q , si l'on a pris q plus grand que 1, ou en divisant la plus grande de ces racines par q , si l'on a pris q moindre que 1.

3^e Cas. L'équation proposée a toutes ses racines en progression arithmétique.

$$(1) \quad x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots = 0.$$

Soient $a, a + r, a + 2r, \dots a + (m - 1)r$ les racines cherchées.

On voit facilement que l'équation $f(x - r) = 0$, et, par suite, l'équation $f'(x - r) - f'(x) = 0$ ont les $m - 1$

racines $a + r$, $a + 2r$, ... $a + (m-1)r$ communes avec la proposéé.

$$f(x-r) - f(x) = -mr x^{m-1} - \frac{(m-1)A_1 r}{1.2} x^{m-2} \dots + \frac{m(m-1)}{1.2} r^2 + \text{etc.} \Bigg\} = 0.$$

Laissant de côté le cas où $r=0$, divisant par r et changeant les signes, nous trouverons ainsi :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} mx^{m-1} + (m-1)A_1 x^{m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2} r \\ - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} A_1 r + \text{etc} \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} r^2 \end{array} \right\} = 0.$$

Les racines de cette équation étant $a + r$, $a + 2r$, ... $a + (m-1)r$, nous concluons comme précédemment que leur somme est égale à $-A_1 - a$, d'où

$$- \frac{m-1}{m} A_1 + \frac{m-1}{1.2} r = -A_1 - a,$$

ou

$$(2) \quad 2am + m(m-1)r = -2A_1.$$

équation du premier degré en a et r .

La considération des produits des racines, multipliées deux à deux, donne encore

$$\frac{m-2}{m} A_2 - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.m} A_1 r + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3} r^2 = A_2 - a(-A_1 - a)$$

ou

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} r^2 - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} A_1 r \\ = 2A_2 + A_1 a + ma. \end{array} \right.$$

Les équations (α) et (β) donneront a et r ; en éliminant a , on trouve pour r deux valeurs égales et de signes contraires.

Nous conseillons de conserver le système des équations (α) et (β) pour les applications numériques.

L'équation (α) est celle que donne immédiatement l'arithmétique.

4^e Cas. L'équation (1) a seulement n racines en progression arithmétique.

On trouvera ces n racines en suivant une méthode analogue à celle qui est indiquée ci-dessus pour le deuxième cas.