ET. PLOIX

Théorème sur les polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 152-154

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__152_1>

THÉORÈME SUR LES POLAIRES.

P est un point quelconque pris dans le plan de deux cercles donnés, P′ est le point d'intersection des deux polaires de P relativement aux deux cercles. P et P′ sont dits points réciproques. Prouver que l'axe radical passe par le milieu de PP′ (*fig.* 11, *Pl. II*)

(Voir t. VI, p. 452).

PAR M. ÉT. PLOIX,
Élève au lycée de Versailles.

Abaissons des points P et P′ les perpendiculaires PG, P′G′ sur la ligne des centres O, O′, et par le point I où l'axe radical IK rencontre PP′, menons HH′ parallèle à OO′: il faut prouver que l'on a $PI = P'I$, ou bien $IH = IH'$, ou $G'K = KG$.

Le point P a pour polaire QP′; donc la droite PG aura pour pôle le point A où la polaire de P rencontre OG; on a donc

$$OG \,.\, OA = R^2.$$

De même, on a

$$O'G' \,.\, O'B = r^2,$$

R et r désignant les rayons des cercles O et O'. Ces deux relations donnent

$$OG.OA - O'G'.O'B = R^2 - r^2.$$

IK étant un axe radical, on a

$$\overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2 = R^2 - r^2;$$

d'où

$$(1) \qquad OG.OA - O'G'.O'B = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2.$$

Les deux triangles AG'P', OPG étant semblables, donnent

$$G'P'.GP = OG.AG'.$$

De même, les deux triangles BG'P', OPG sont semblables et donnent

$$G'P'.GP = BG'.O'G.$$

Comparant les deux égalités, on en déduit

$$(2) \qquad AG'.OG = BG'.O'G.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités (1) et (2), on trouve

$$OG(OA + AG') - O'G(O'B + BG') = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2,$$

ou

$$OG.OG' - O'G.O'G' = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2.$$

Or

$$OG = OK + KG,\ OG' = OK - G'K,\ O'G = O'K - KG$$
$$\text{et } O'G' = O'K + KG';$$

d'où

$$(GK + KG)(OK - G'K) - (O'K - KG)(O'K + KG') = \overline{OK}^2 - \overline{O'K}^2.$$

Effectuant les multiplications et supprimant les termes qui se détruisent, on trouve

$$KG.GK + KG.O'K = KG'.OK + KG'.O'K,$$

ou

$$KG(OK + O'K) = KG'(OK + O'K);$$

d'où

$$KG = KG'.$$