

ET. PLOIX

Théorème sur les polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 152-154

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__152_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES POLAIRES.

P est un point quelconque pris dans le plan de deux cercles donnés, **P'** est le point d'intersection des deux polaires de **P** relativement aux deux cercles. **P** et **P'** sont dits points réciproques. Prouver que l'axe radical passe par le milieu de **PP'** (*fig. 111, Pl. II*)

(Voir t. VI, p. 152).

PAR M. ÉT. PLOIX,
Élève au lycée de Versailles.

Abaissons des points **P** et **P'** les perpendiculaires **PG**, **P'G'** sur la ligne des centres **O**, **O'**, et par le point **I** où l'axe radical **IK** rencontre **PP'**, menons **HH'** parallèle à **OO'** : il faut prouver que l'on a $PI = P'I$, ou bien $IH = IH'$, ou $G'K = KG$.

Le point **P** a pour polaire **QP'**; donc la droite **PG** aura pour pôle le point **A** où la polaire de **P** rencontre **OG**; on a donc

$$OG \cdot OA = R^2.$$

De même, on a

$$O'G' \cdot O'B = r^2,$$

R et r désignant les rayons des cercles O et O'. Ces deux relations donnent

$$OG \cdot OA - O'G' \cdot O'B = R^2 - r^2.$$

IK étant un axe radical, on a

$$\overline{OK}^2 - O'\overline{K}^2 = R^2 - r^2;$$

d'où

$$(1) \quad OG \cdot OA - O'G' \cdot O'B = \overline{OK}^2 - O'\overline{K}^2.$$

Les deux triangles AG'P', OPG étant semblables, donnent

$$G'P' \cdot GP = OG \cdot AG'.$$

De même, les deux triangles BG'P', OPG sont semblables et donnent

$$G'P' \cdot GP = BG' \cdot O'G.$$

Comparant les deux égalités, on en déduit

$$(2) \quad AG' \cdot OG = BG' \cdot O'G.$$

Ajoutant membre à membre les deux égalités (1) et (2), on trouve

$$OG(OA + AG') - O'G(O'B + BG') = \overline{OK}^2 - O'\overline{K}^2,$$

ou

$$OG \cdot OG' - O'G \cdot O'G' = \overline{OK}^2 - O'\overline{K}^2.$$

Or

$$OG = OK + KG, \quad OG' = OK - G'K, \quad O'G = O'K - KG$$

$$\text{et } O'G' = O'K + KG';$$

d'où

$$(OK + KG)(OK - G'K) - (O'K - KG)(O'K + KG') = \overline{OK}^2 - O'\overline{K}^2.$$

Effectuant les multiplications et supprimant les termes

(154)

qui se détruisent, on trouve

$$KG.GK + KG.O'K = KG'.OK + KG'.O'K,$$

ou

$$KG(OK + O'K) = KG'(OK + O'K);$$

d'où

$$KG = KG'.$$