

TERQUEM

Théorèmes et problèmes élémentaires sur le foyer et la directrice de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 121-129

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__121_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES ET PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES SUR LE FOYER ET LA DIRECTRICE DE LA PARABOLE.

Remarque. Nous mettrons ici quelques théorèmes qu'on trouve partout, uniquement pour compléter ce travail.

PROBLÈME I. *Étant donnés deux points et le foyer d'une parabole, trouver une équation de cette conique.*

Solution. Soient A, B, F les deux points et le foyer donnés, prenons ce foyer pour origine; soient y', x', y'', x'' les coordonnées des points A et B, les axes étant rectangulaires: l'équation de la courbe est

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2) = (k'y + kx - l)^2 \text{ (voir t. II, p. 427).}$$

Faisons

$$x'^2 + y'^2 = r'^2, \quad x''^2 + y''^2 = r''^2.$$

Faisons, de plus, $\frac{k}{k'} = \nu$; nous aurons

$$(1) \quad y' + \nu x' - \frac{l}{k'} = r' \sqrt{1 + \nu^2},$$

$$(2) \quad y'' + \nu x'' - \frac{l}{k'} = r'' \sqrt{1 + \nu^2}.$$

Retranchant membre à membre et faisant disparaître le radical, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \nu^2 [(x' - x'')^2 - (r' - r'')^2] + 2\nu (y' - y'')(x' - x'') \\ = (r' - r'')^2 (y' - y'')^2; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu [(r' - r'')^2 - (x' - x'')^2] &= (x' - x'')(y' - y'') \\ &\pm (r' - r'') \sqrt{2(\nu^2 r''^2 - x'x'' - y'y'')}. \end{aligned}$$

1^{re} *Observation.* Lorsque l'angle AFB est aigu, on peut

toujours prendre les axes de manière que les quatre coordonnées des deux points soient positives ; par conséquent, r' et r'' doivent être de même signe. Donc ν n'a que deux valeurs toujours réelles, car $\nu'\nu'' > x'x'' + y'y''$, et de même $\frac{l}{k}$; on parvient au même résultat lorsque l'angle AFB n'est pas aigu.

2^e *Observation*. Si l'on prend FA pour axe des x , les valeurs de ν seront données en parties du triangle FAB.

3^e *Observation*. La solution géométrique revient à mener des tangentes communes aux deux cercles décrits des points A et B comme centres, avec les rayons FA et FB ; les deux cercles se coupant au point F, il n'y a que deux tangentes, lesquelles sont les directrices des deux paraboles qui répondent à la question.

4^e *Observation*. Lorsque les deux points et le foyer sont sur la même droite, la parabole se réduit à cette droite, et la directrice, perpendiculaire à cette droite, passe par le foyer. Les points de la droite sont alors à égale distance du foyer et de la directrice ; ce qui caractérise la parabole.

PROBLÈME II. *Étant donnés le foyer et un point d'une parabole, trouver 1^o le lieu du sommet ; 2^o l'enveloppe de la directrice.*

Solution. Conservons la même notation. L'équation de la directrice est $y + \nu x - \frac{l}{k} = 0$; l'équation de l'axe principal est $\nu y - x = 0$. Éliminant ν entre ces deux équations, après avoir remplacé $\frac{l}{k}$ par sa valeur tirée de l'équation (1), on a pour le lieu du point où l'axe rencontre la directrice, l'équation

$$(y^2 + x^2 - yy' + xx')^2 = r'^2 (y^2 + x^2),$$

équation d'une *aplanétique* (tome IV, page 426). C'est

le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du cercle $(y - y')^2 + (x - x')^2 = \nu^2$ sur les tangentes à ce cercle. C'est aussi une épicycloïde (v. t. III, p. 124). L'origine est un point conjugué à la courbe, comme cela doit être; ce point disparaît. En passant aux coordonnées polaires, on a

$$z \cos 2\varphi - y' \sin \varphi + x' \cos \varphi = \pm \nu',$$

équation d'une courbe facile à construire. Il est évident que le lieu du sommet est une courbe semblable à celle-ci, de dimension moitié moindre et semblablement située relativement au foyer.

Directrice. Éliminant $\frac{l}{k'}$ de l'équation de la directrice, on obtient

$$(a) \quad [y - y' + \nu(x - x')]^2 = r'^2(1 + \nu^2);$$

prenant la dérivée relativement à ν , on a

$$(b) \quad [y - y' + \nu(x - x')](x - x') = \nu r'^2;$$

d'où

$$\nu = \frac{(y - y')(x - x')}{r'^2 - (x - x')^2}.$$

Élevant l'équation (b) au carré et combinant cette nouvelle équation avec l'équation (a), on déduit

$$\nu^2 = \frac{(x - x')^2}{r'^2 - (x - x')^2}, \quad 1 + \nu^2 = \frac{r'^2}{r'^2 - (x - x')^2};$$

substituant ces diverses valeurs dans l'équation (a), on obtient

$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r'^2.$$

L'enveloppe des directrices est donc le cercle décrit du point donné comme centre avec un rayon égal à r' .

Observation. Nous donnons ce calcul comme exer-

cice, car les résultats sont intuitifs et s'obtiennent immédiatement.

PROBLÈME III. *Étant donnés le foyer, un point d'une parabole et une droite tangente, trouver une équation de cette conique.*

Solution. Même notation que ci-dessus, et de plus $dy + ex + f = 0$ l'équation donnée de la tangente; on a la relation

$$\frac{l}{k'}(d^2 + e^2) + 2f(d + ee) = 0 \text{ (t. II, p. 108).}$$

Cette équation et l'équation (1) font connaître, par des équations du second degré, les valeurs de v et de $\frac{l}{k'}$ qui déterminent l'équation de la courbe.

Observation. On peut choisir les axes de telle sorte qu'on ait $e = 0$: l'on trouve alors $\frac{l}{k'} = -\frac{2f}{d}$; c'est l'ordonnée du point où la directrice rencontre l'axe des y , c'est-à-dire la parallèle à la tangente menée par le foyer, ordonnée qui est double de l'ordonnée $-\frac{f}{d}$ du point où la tangente rencontre l'axe des y . Substituant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$y' + vx' + \frac{2f}{d} = r' \sqrt{1 + v^2},$$

résultats auxquels on peut parvenir immédiatement.

PROBLÈME IV. *Étant donnés le foyer et une tangente, trouver l'enveloppe de la directrice et le lieu du sommet.*

Solution. Abaisant du foyer une perpendiculaire sur la tangente, le pied de la perpendiculaire est le point enveloppe des tangentes au sommet; donc le lieu du sommet est une circonférence décrite sur la perpendiculaire comme diamètre. Prolongeant la perpendiculaire d'une

longueur égale à elle-même, on obtient le point enveloppe des directrices.

PROBLÈME V. *Étant donnés le foyer et deux tangentes, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Conservons mêmes axes, même origine, même notation qu'au problème I. L'équation de la courbe est

$$(y^2 + x^2)(1 + v^2) = \left(y + vx - \frac{l}{k'}\right)^2.$$

Soient $dy + ex + f = 0$, $d'y + e'x + f' = 0$ les équations des deux tangentes; on a donc les deux relations

$$\frac{l}{k'}(d^2 + e^2) + 2f(d + ve) = 0,$$

$$\frac{l}{k'}(d'^2 + e'^2) + 2f'(d' + ve') = 0;$$

ces deux équations du premier degré entre v et $\frac{l}{k'}$ donnent les valeurs de ces inconnues: il n'y a donc qu'une solution.

Solution géométrique. Du foyer on abaisse une perpendiculaire sur une tangente, on la prolonge doublée, ce qui donne un point de la directrice; l'autre tangente donne un second point.

PROBLÈME VI. *Étant donnés le foyer, une tangente et le point de contact, trouver une équation de la courbe.*

Solution. En prenant les mêmes notations, soient x' , y' les coordonnées du point de contact; on a les deux équations

$$v^2 y'^2 + 2x'v \frac{l}{k'} + \frac{l^2}{k'^2} - 2x'y'v + 2y' \frac{l}{k'} = 0,$$

$$\frac{l}{k'}(d^2 + e^2) + 2f(d + ve) = 0,$$

qui donnent deux valeurs pour les inconnues $\frac{l}{k'}$ et v ; on

peut choisir les axes de manière qu'on ait $e = 0$, ce qui abrège le calcul.

Solution géométrique. La solution géométrique ne présente aucune difficulté.

PROBLÈME VII. *Étant donnés trois points et la direction de l'axe, trouver l'équation de la courbe.*

Solution. Prenons le point A pour origine, le diamètre qui y passe pour axe des x , et les axes rectangulaires. Soient x', y', x'', y'' les coordonnées des deux autres points; l'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 + Dy + Ex = 0.$$

On détermine D et E au moyen des deux équations du premier degré

$$Dy' + Ex' = -y'', \quad Dy'' + Ex' = -y''^2,$$

lesquelles donnent

$$\begin{aligned} D(y'x'' - x'y'') &= x'y''^2 - x''y'^2, \\ E(y'x'' - x'y'') &= y'y''^2 - y'y''^2 \end{aligned}$$

On a

$$\lambda = 2E, \quad \lambda' = 0, \quad l = D', \quad l' = E^2, \quad L = E^2, \quad N = 1;$$

donc α et β étant les coordonnées du foyer, on a

$$\alpha = \frac{D^2 - E^2}{4E}, \quad \beta = -\frac{D}{2} \text{ (t. II, p. 432) et pour le sommet,}$$

$$\alpha' = \frac{D^2}{4E}, \quad \beta' = -\frac{D}{2},$$

$$4Ex + D^2 - E^2 = 0, \text{ équation de la directrice.}$$

La solution géométrique s'obtient en faisant passer le diamètre par le milieu d'une des cordes données.

PROBLÈME VIII. *Étant donnés deux points et la direction de l'axe, trouver 1° le lieu du foyer; 2° le lieu du sommet.*

Solution. Même notation et même système de coordonnées que pour le problème précédent. On a

$$\begin{aligned} Dy' + Ex' &= -y'^2, \quad D = -2\beta, \\ E^2 + 4\alpha E &= 4\beta^2, \quad Ex' = 2\beta y' - y'^2. \end{aligned}$$

Éliminant E, on obtient, pour le lieu du foyer,

$$4\beta^2(y'^2 - x'^2) + 8x'y'\alpha\beta - 4y'^3\beta - 4x'y'^2\alpha + y'^4 = 0,$$

équation d'une hyperbole.

Les coordonnées du centre sont $\frac{1}{2}x'$, $\frac{1}{2}y'$, et les équations des asymptotes sont

$$2\beta - y' = 0,$$

$$2\beta(x'^2 - y'^2) - 4\alpha x'y' + y'(y'^2 + x'^2),$$

$$x'y'^2 - 2y'\beta\alpha + y'^2\alpha = 0, \text{ hyperbole, lieu du sommet.}$$

Les coordonnées du centre sont $\frac{1}{2}x'$ et $\frac{1}{2}y'$, et les asymptotes sont parallèles aux droites $\beta = 0$, $\beta x' - 2\alpha y' = 0$.

PROBLÈME IX. *Étant donnés deux points, une tangente, la direction de l'axe, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Même notation et même système d'axes qu'au problème précédent. Soit $dy + ex + f = 0$ l'équation de la tangente.

On a pour condition de tangence

$$[Ed - De]^2 + 4efE = 0 \text{ (t. II, p. 108)}$$

et

$$Dy' + Ex' = -y'^2.$$

Par l'élimination de D, il vient

$$E^2[dy' + ex']^2 + 2Eey'^2[dy' + ex' + 2f] + e^2y'^4 = 0;$$

d'où

$$E[dy' + ex']^2 = -ey'^2[dy' + ex' + 2f \pm 2\sqrt{f(dy' + ex' + f)}].$$

PROBLÈME X. *Étant donnés un point, une tangente et la direction de l'axe, trouver 1° le lieu du foyer; 2° le lieu du sommet.*

Solution. Prenons le point pour origine, la direction de l'axe pour axe des x , et les coordonnées rectangulaires; l'équation de la parabole est

$$y^2 + Dy + Ex = 0.$$

Même notation qu'au problème précédent; ainsi on a, pour condition du contact,

$$(Ed - De)^2 + 4efF = 0.$$

On a, en outre (voir PROBLÈME VII),

$$\alpha = \frac{D^2 - E^2}{4E}, \quad \beta = -\frac{D}{2}.$$

Éliminant D et E entre ces trois équations, on obtient une équation du quatrième degré qui se décompose en ces deux autres,

$$\beta^2 = 0, \quad \beta^2(d^2 - e^2)^2 + 4\alpha\beta(d^2 - e^2)de + 4\alpha^2d^2e^2 - 8de^2f\beta - 4e^3f\alpha - 4e^2f^2 = 0.$$

Cette dernière représente une parabole dont la direction de l'axe est donnée par l'équation

$$\beta(d^2 - e^2) + 2\alpha de = 0.$$

Lorsque $f = 0$, l'origine devient un point de contact; la parabole se réduit à cette droite, ce qui est évident a priori, et cette droite fait, avec l'axe des x , un angle double de celui que fait la tangente avec cet axe.

Le sommet (voir PROBLÈME VII), $D = -2\beta$; $E = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

Substituant ces valeurs dans l'équation de contact, et divisant par β^2 , on obtient

$$\beta^2d^2 + 4de\alpha\beta + 4e^2x^2 + 4def = 0,$$

équation d'une parabole.

PROBLÈME XI. *Étant données trois tangentes et la direction de l'axe, trouver une équation de la courbe.*

Solution. Prenons pour origine le point d'intersection de deux de ces tangentes, et pour axe des x , le diamètre qui passe par ce point. Soient

$$dy + ex + f = 0, \quad d'y + e'x = 0, \quad d''y + e''x = 0$$

les équations des trois tangentes, et

$$y^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Les trois conditions de tangence sont exprimées par les équations

$$(1) \quad E^2 d^2 - 2 de DE + (D^2 - 4F) e^2 + 4feF = 0,$$

$$(2) \quad E^2 d'^2 - 2 d' e' DE + (D^2 - 4F) e'^2 = 0,$$

$$(3) \quad E^2 d''^2 - 2 d'' e'' DE + (D^2 - 4F) e''^2 = 0.$$

Éliminant $D^2 - 4F$ entre (2) et (3), et faisant disparaître le facteur commun $d'e'' - d''e'$, on obtient

$$(4) \quad E(d'e'' + d''e') = 2e'e''D.$$

Éliminant $D^2 - 4F$ entre (1) et (3), on obtient de même

$$E(d'e''^2 - d''^2e^2) + 2Dee''[d''e - de''] + 4fee''^2 = 0.$$

Faisons, pour abréger,

$$(de' - d'e)(de'' - d''e') = M;$$

d'où

$$DM + 2fe[d'e'' + d''e'] = 0;$$

$$EM + 4fee'e'' = 0;$$

$$FM^2 - f^2e^2[d''e' - d'e'']^2 = 0;$$

$$\alpha M + fe[d'd'' - e'e''] = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{coordonnées du foyer} \\ \beta M + fe(d'e'' + d''e') = 0 \end{array} \right. \quad (\text{voir t. II, p. 432});$$

$$Mx + 2fe[d'd'' + e'e''] = 0, \text{ équation de la directrice} \\ (\text{voir t. II, p. 433}).$$

Observation. Lorsque $d'd'' + e'e'' = 0$, les deux tangentes sont perpendiculaires, et l'équation de la directrice se réduit à $x = 0$, ce qui est évident a priori.